Travail de candidature

Anecdotes et curiosités au cours de mathématiques

Déclaration

Je soussignée, déclare sur l'honneur avoir réalisé ce travail par mes propres moyens et sans aide illicite d'autrui. Toutes les sources utilisées sont mentionnées conformément aux usages en vigueur.

Junglinster, le 17 décembre 2018 Anne Schwartz

Anne Schwartz
Candidat-professeur en sciences au Lënster Lycée

Des avantages de l'intégration d'anecdotes et de curiosités au cours de mathématiques

Affectation au Lënster Lycée Junglinster (LLJ)
depuis septembre 2014

Résumé

« Pourquoi étudions-nous cela ? » Chaque enseignant de mathématiques connaît cette question. Ce n'est pas la question d'un élève paresseux qui n'a aucune envie d'apprendre les mathématiques. C'est une question sincère d'un élève qui attend une réponse sincère de son professeur.

Ce travail propose une alternative qui cherche moins à répondre à cette question que de la rendre superflue. Et si les élèves trouvaient le cours de mathématiques intéressant ? Après une partie théorique sur l'histoire de l'enseignement des mathématiques, la neurologie de l'apprentissage et la narratologie, ce travail se veut un recueil de notions d'histoire des mathématiques, d'anecdotes, de curiosités, de paradoxes et de blagues. Il sera utile aux enseignants de mathématiques qui aimeraient alléger leurs cours s'ils estiment que ces derniers manquent de vivacité, qui cherchent une introduction alternative à un chapitre et à ceux qui aimeraient simplement faire une recherche sur l'histoire d'un sujet au programme au secondaire afin de gagner en culture générale.

Remerciements

Je tiens à remercier mon patron Monsieur Jean-Claude Delagardelle pour l'intérêt qu'il a montré envers le sujet de ce travail de candidature, pour sa disponibilité et ses précieux conseils.

L'aide de mes collègues enseignants a été un élément important pour écrire ce travail. Merci à tous ceux que j'ai interviewés et qui m'ont permis d'enrichir ce travail grâce à leurs expériences et réflexions.

Préface

Le style du présent travail de candidature est certainement peu conventionnel pour un travail de recherche. Le lecteur remarquera qu'un style narratif a été choisi par endroits et que la partie théorique comporte des anecdotes. Ceci est tout à fait voulu et est supposé souligner et expliciter le contenu.

Former les hommes, ce n'est pas remplir un vase, c'est allumer un feu. (Aristophane)

Sommaire

1. Introduction

Tout apprentissage commence par des histoires. Nos parents nous ont lu nos premiers livres. En maternelle, on nous a lu des contes de fées. Plus tard, nous avons regardé des documentaires sur des sujets qui nous intéressaient. Notre source préférée de savoir provient souvent d'une autre personne qui nous raconte une histoire. Avant l'invention de l'imprimerie, c'était d'ailleurs le seul moyen de transmettre du savoir. Les mathématiques pourraient-elles également faire l'objet d'un récit ? À mon avis, tout peut être une histoire, même en mathématiques. En parlant à mes élèves et à mes collègues, j'ai remarqué qu'il existe un besoin d'écouter des histoires d'un côté et de connaître des histoires de l'autre. Ce travail explicitera les avantages des histoires dans l'enseignement et offrira aux enseignants de mathématiques désireux d'étendre leur répertoire un recueil de récits.

Au début de cette année, j'ai demandé à mes élèves d'écrire en quelques mots ce qu'ils attendaient du cours de mathématiques, ce qui leur importait. Quatre réponses sont souvent revenues.

- L'enseignant devrait expliquer avec patience.
- L'enseignant devrait avoir de l'humour.
- L'enseignant ne devrait pas faire que des exercices de la première à la dernière minute.
- L'enseignant ne devrait pas appeler les élèves au tableau.

Je suis tout à fait d'accord avec le premier vœu. Je ne peux pas accepter le dernier pour des raisons pédagogiques, même si je veille toujours à ne pas mettre mal à l'aise les élèves au tableau. Je trouvais particulièrement intéressants l'humour et le non-enchaînement d'exercices. Les élèves semblent avoir besoin d'un cours intéressant et décontracté. Les anecdotes sont un bon moyen d'atteindre cet objectif.

En effet, les élèves ne s'intéressent pas uniquement aux applications de ce que nous enseignons mais aussi aux origines des méthodes, théorèmes et théories. Cette curiosité mérite d'être cultivée. Par la narration, l'étonnement et l'humour, mon but est de donner aux élèves le goût de la recherche mathématique et un œil pour la beauté de cette langue de l'univers. Un élève qui aime apprendre les mathématiques sera plus attentif et aura plus de facilités à acquérir les compétences que cette branche veut lui transmettre. L'élève aimera les mathématiques si le cours de mathématiques est intéressant et chargé d'émotions. Ces convictions résultent de ma propre expérience mais aussi des interviews et des recherches menées dans le cadre de ce travail.

Afin de connaître les besoins de mes collègues, j'ai mené des entretiens avec douze enseignants, mathématiciens et autres. Les conversations n'étaient pas des interviews classiques et je n'avais pas un catalogue de questions préformulées. Il était important pour moi de ne pas influencer les interviewés dans leur opinion. J'ai plutôt écouté mes collègues. Ils m'ont parlé de ce à quoi ils sont attentifs dans leur façon d'enseigner, des enseignants qui les avaient marqués durant leur propre scolarité et de leurs professeurs de mathématiques. Ils m'ont également raconté les moments qui ont fait briller les yeux de leurs élèves. J'ai voulu connaître l'opinion des personnes qui connaissent le mieux les élèves et qui observent leurs réactions et leurs notes tous les jours. Ces collègues m'ont confortée dans l'idée que ce travail sera utile aux enseignants de mathématiques au Luxembourg.

2. Histoire de l'enseignement des mathématiques

Le mot « mathématique » vient du grec par l'intermédiaire du latin. Le mot μάθημα (máthēma) signifie « science, connaissance » et a donné naissance à l'adjectif μαθηματικός (mathematikos), d'abord « relatif au savoir » puis « qui concerne les sciences mathématiques[1] ».

Le substantif τα μαθηματικά (ta mathēmatiká) a été développé pour désigner les sciences mathématiques dans leur ensemble. Cette forme plurielle, utilisée par Aristote, explique l'usage du pluriel pour le substantif en latin chez Cicéron (mathematica), puis en français[1].

L'usage du pluriel est donc un héritage de l'époque antique, où le quadrivium regroupait les quatre arts dits « mathématiques » : l'arithmétique, la géométrie, l'astronomie et la musique. Le singulier (" « la mathématique ») est parfois employé en français. Toutefois, certains auteurs, à la suite de Nicolas Bourbaki, insistent sur l'utilisation du singulier, pour montrer l'uniformisation apportée par l'approche axiomatique contemporaine. Jean Dieudonné semble être le premier à avoir lancé ce mot d'ordre : « La Mathématique est une » ; le vaste traité de Bourbaki s'intitule *Éléments de mathématique*, tandis que, par contraste, le fascicule historique qui l'accompagne a pour titre *Élements d'histoire des mathématiques*. Cédric Villani préconise l'utilisation du singulier pour affirmer l'unité du domaine[1].

Même si l'enseignement des mathématiques a beaucoup évolué depuis le Moyen Âge, les cours de mathématiques tels qu'ils existent aujourd'hui ne sont pas une invention du XXe siècle, mais plutôt le résultat des influences des siècles passés. La religion et les politiques ont joué un grand rôle dans cette évolution.

Dans l'Antiquité grecque, on établissait une nette distinction entre l'instituteur élémentaire et l'instituteur scientifique. Le premier était responsable de transmettre à l'enfant les bases des connaissances nécessaires à la vie quotidienne et il était peu reconnu. L'instituteur scientifique enseignait quant à lui par le dialogue socratique dont dérive le jeu-questionnaire, et son prestige était bien plus grand[2].

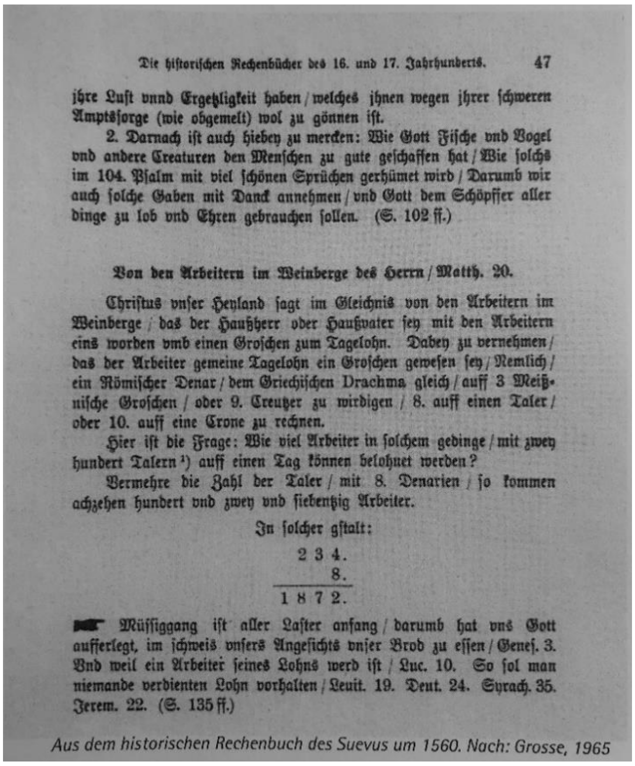
Au Moyen Âge, il n'était pas commun d'apprendre à calculer à l'école. Parfois, les mathématiques étaient enseignées pendant une heure par semaine. Et souvent elles faisaient partie du cours de musique et n'étaient pas considérées comme un cours aussi important que les autres[3]. Pourtant, le commerce avait de plus en plus besoin des maîtres de calcul. Ils fixaient le prix du pain, ce qui était une grande responsabilité. Les commerçants, conscients de l'importance du calcul, envoyaient alors leurs enfants dans des écoles privées pour apprendre cette matière particulièrement utile. Un de ces maîtres de calcul était Adam Ries qui enseignait aussi dans son école privée[4].

Progressivement, la nécessité de la part des écoles d'évaluer les élèves par des examens a entraîné une réduction des cours de mathématiques à une suite d'exercices faciles à noter. Du XVIe au XVIIIe, les exercices tournaient autour de thématiques religieuses. Ils avaient souvent une morale[4].

Au cours du XVIIIe siècle, on a commencé à regrouper les exercices et à les systématiser. Au XIXe siècle, le sujet prépondérant des exercices était l'armée et les coûts y relatifs. À la fin du XXIe siècle, on commence à intégrer dans les livres scolaires de plus en plus d'exercices-problèmes traitant de

---

[1] https://fr.wikipedia.org/wiki/Math%C3%A9matiques#%C3%89tymologie [résumé]
[2] *Mathematik Lehren* N° 91 pp. 10-13 [résumé]
[3] https://de.wikipedia.org/wiki/Rechenmeister [paraphrasé]
[4] Andelfinger p. 19 [paraphrasé]



Die historischen Rechenbücher des 16. und 17. Jahrhunderts. 47

jhre Lust vnnd Ergetzligkeit haben / welches jhnen wegen jhrer schweren Amptssorge (wie obgemelt) wol zu gönnen ist.

2. Darnach ist auch hiebey zu mercken: Wie Gott Fische vnd Vogel vnd andere Creaturen den Menschen zu gute geschaffen hat / Wie solchs im 104. Psalm mit viel schönen Sprüchen gerhümet wird / Darumb wir auch solche Gaben mit Danck annehmen / vnd Gott dem Schöpffer aller dinge zu lob vnd Ehren gebrauchen sollen. (S. 102 ff.)

Von den Arbeitern im Weinberge des Herrn / Matth. 20.

Christus vnser Heyland sagt im Gleichnis von den Arbeitern im Weinberge / das der Haußherr oder Haußvater sey mit den Arbeitern eins worden vmb einen Groschen zum Tagelohn. Dabey zu vernehmen / das der Arbeiter gemeine Tagelohn ein Groschen gewesen sey / Nemlich / ein Römischer Denar / dem Griechischen Drachma gleich / auff 3 Meißnische Groschen / oder 9. Creutzer zu wirdigen / 8. auff einen Taler / oder 10. auff eine Crone zu rechnen.

Hier ist die Frage: Wie viel Arbeiter in solchem gedinge / mit zwey hundert Talern [1]) auff einen Tag können belohnet werden?

Vermehre die Zahl der Taler / mit 8. Denarien / so kommen achzehen hundert vnd zwey vnd siebentzig Arbeiter.

In solcher gstalt:

$$\begin{array}{r} 2\,3\,4. \\ 8. \\ \hline 1\,8\,7\,2. \end{array}$$

Müssiggang ist aller Laster anfang / darumb hat vns Gott aufferlegt, im schweis vnsers Angesichts vnser Brod zu essen / Genes. 3. Vnd weil ein Arbeiter seines Lohns werd ist / Luc. 10. So sol man niemande verdienten Lohn vorhalten / Leuit. 19. Deut. 24. Syrach. 35. Jerem. 22. (S. 135 ff.)

Aus dem historischen Rechenbuch des Suevus um 1560. Nach: Grosse, 1965

Image : Andelfinger p. 20

problématiques géographiques, écologiques, chimiques ou météorologiques. Les élèves appliquent les recettes qui leur sont données sans savoir d'où elles viennent et ils les oublient rapidement, faute de connaissances théoriques minimales. Ces derniers siècles ont donné au cours de mathématiques une image de mise au pas, d'utilisation de recettes et de manipulation de nombres et de lettres[5].

Déjà en 1721, G. Berkeley soulignait :

« Ob es nicht eher die Absicht der modernen Mathematik zu sein scheint, durch einen Trick einen Ausdruck zu gewinnen, als durch einen Beweis zu einer wissenschaftlichen Erkenntnis zu glangen[6]. »

Au début du XIX^e siècle, l'analyse était prête à être intégrée au cours de mathématiques, mais les humanistes s'y opposaient violemment. L'arithmétique et la géométrie s'intégraient bien dans la tournure d'esprit classique, contrairement à l'analyse qui était symbole de modernité. À la fin du XIX^e siècle, les sujets traités se diversifient en raison des besoins de l'industrie. La planification et la fabrication demandent des calculs précis, d'où l'intérêt d'une géométrie plus poussée, de la trigonométrie, des suites et du calcul infinitésimal[7].

Les auteurs de livres scolaires essaient depuis quelques années d'incorporer à nouveau des notions historiques dans les différents chapitres. Soit en introduction, soit en information supplémentaire, soit dans les exercices. L'enseignant demeure cependant le facteur le plus important quand il s'agit de rendre le cours plus intéressant et vivant pour les élèves ; c'est l'enseignant qui peut transmettre soit des recettes de calcul, soit une culture mathématique.

[5] Andelfinger p. 20 [résumé]
[6] Andelfinger p. 27 citant Berkeley, *Schriften über die Grundlagen der Mathematik*, édition de 1985
[7] Andelfinger p. 28 [paraphrasé]

3. Enseigner une culture mathématique

Avant l'élaboration du questionnaire de l'évaluation PISA 2003, un groupe d'experts internationaux en mathématiques, didactique et psychologie a défini le cadre conceptuel d'évaluation de la culture mathématique des élèves de 15 ans. La définition officielle de « culture mathématique » qui a été le compromis trouvé par ce groupe d'experts est la suivante[8] :

« La culture mathématique est l'aptitude d'un individu à identifier et comprendre le rôle des mathématiques dans le monde, à porter des jugements fondés à leur propos, et à s'engager dans des activités mathématiques en fonction des exigences de sa vie, en tant que citoyen constructif, impliqué et réfléchi[9]. »

En 2015, le Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse a repris et adapté les socles de compétences disciplinaires déjà établis par le Ministère de l'Éducation nationale et de la Formation professionnelle en 2011. Dans ces documents, les objectifs de l'enseignement des mathématiques ont été définis pour toutes les classes. L'un d'entre eux, visé à tout ordre d'enseignement, est le suivant :

« Les élèves devront disposer à la fin de la scolarité obligatoire des compétences mathématiques leur permettant d'appliquer avec succès et de manière responsable les mathématiques dans leur vie citoyenne et professionnelle. Par ailleurs ils auront développé une représentation adéquate des mathématiques en tant qu'héritage culturel[10]. »

Lindemann écrivait déjà en 1904 :

« Die Mathematik ist stets ein großer Faktor im Kulturleben der Menschheit gewesen; als solcher ist sie dem Schüler in historischem Zusammenhange vorzuführen[11]. »

Le Larousse donne plusieurs définitions du mot histoire, dont :

« Suite des événements, des faits réels, des états marquant l'évolution d'un groupe humain, d'un personnage, d'un aspect de l'activité humaine, etc. »

Les mathématiques sont une activité humaine ayant subi de grands changements durant son évolution. L'enseignement actuel n'en tient compte que très rarement, enchaînant le théorème de Thalès et les fonctions sans mentionner qu'entre les deux notions il y a 1000 ans d'évolution. Je me suis demandé si l'histoire des mathématiques ne devrait pas avoir une place plus importante dans l'enseignement de cette matière et comment on pourrait l'aborder.

En lisant les socles des différentes classes, on remarque que l'héritage culturel n'est plus abordé dans les grilles des compétences à développer. Les enseignants sont donc obligés de transmettre aux élèves cet aspect des mathématiques pendant leurs cours, mais le cadre et les méthodes pour le faire ne leur sont pas précisées.

Certes, dans les livres scolaires, on rencontre de temps en temps une note biographique sur un mathématicien ou sur la découverte d'un exercice. Ainsi, le papyrus Rhind devrait être connu par la plupart des enseignants de mathématiques. Pourtant, les livres scolaires français que nous utilisons

[8] MEN français, *Les dossiers : Enseignement scolaire*, p. 25 [résumé]
[9] OECD, *Compétences en sciences, lecture et mathématiques*, p. 13
[10] MEN, Socles
[11] Mayer p. 13 citant Toepell 1996 p. 337 citant Lindemann 1904

au Luxembourg ne le mentionnent pas et négligent la transmission d'une culture mathématique. De nombreux auteurs trouvent cela dommage.

Ainsi Flegg soulignait dans les années 1970 que l'histoire des mathématiques devrait être connue par tout élève comme l'histoire d'autres branches du savoir.

« Mathematics is an integral part of our culture and to neglect the teaching of its history is to have students with an inadequate concept of what mathematics is. ... The history of mathematics needs no more justification than do political history, history of sciences, art history, etc[12]. »

La façon dont les mathématiques sont enseignées ne permet effectivement pas de comprendre comment cette science s'est développée. Or Eves écrit :

« ... a true appreciation of a branch of mathematics is impossible without some aquaintance with the history of that branch, for mathematics is largely a study of ideas, and a genuine understanding of ideas is impossible without an analysis of origines[13]. »

Scriba précise ce problème en remarquant que nous enseignons les théorèmes comme des vérités absolues qui ne peuvent plus évoluer. Par l'introduction de l'histoire de leur origine dans les cours, l'élève comprend mieux leur but mais aussi l'aspect dynamique des mathématiques[14].

En effet, les sujets étudiés par nos élèves au cycle inférieur du secondaire se sont développés pendant des siècles. Les fractions, par exemple, étaient perçues par les anciens Grecs comme le rapport de deux nombres mais pas comme des nombres. Nos élèves sont supposés comprendre qu'une fraction est d'un côté un rapport, d'un autre côté un nombre parfois décimal, parfois non. Et ceci en quelques semaines[15]. Les connaissances sur leur développement pourraient aider l'élève à avoir une vue globale de telles notions.

Le lycée, et surtout les sections qui visent la préparation à des études supérieures, est supposé donner une culture générale aux jeunes. C'est le cas surtout en langues et dans les branches dites secondaires. Dans son exposé de 1959, l'auteur et physicien anglais C.P. Snow est à l'origine de l'expression des « deux cultures », la culture humaniste et la culture scientifique. En critiquant les humanistes, il a contribué à la divergence de ces deux cultures[16]. D'après Scriba, cette évolution est en partie responsable de la peur des mathématiques chez certains élèves. Par conséquent les enseignants de mathématiques peuvent remédier à cette peur en réduisant l'écart entre la culture humaniste et la culture scientifique[17]. L'enseignement de l'histoire des mathématiques est un excellent moyen de rapprocher les deux cultures.

Kubli remarque que c'est le noble devoir d'un enseignement général de transmettre les courants de pensée du présent, mais aussi ceux du passé : « Worauf gründet unser Weltbild, welche Überlegungen wurden früher angestellt, und wie greifen diese in unseren heutigen Alltag ein[18] ?».

[12] Kronfellner p. 7 citant Flegg 1976, p. 307
[13] Kronfellner p. 5 citant Eves 1976, p. 2
[14] Kronfellner p. 9 citant Scriba 1983, p. 126 [paraphrasé]
[15] Mayer p. 53 [paraphrasé]
[16] Kronfellner p. 9
[17] Kronfellner citant Scriba 1983, p. 127 [paraphrasé]
[18] Kubli p. 103

Selon Kubli, c'est seulement en racontant le passé que nous pouvons éclairer le présent. Cette tâche ne revient pas uniquement aux professeurs d'histoire ou de littérature, mais aussi aux enseignants des sciences[19].

On pourrait réduire l'enseignement des mathématiques à une transmission de recettes à suivre sans avoir trop besoin de réfléchir. De même, on peut donner aux enseignants des méthodes didactiques qui fonctionnent indépendamment de leur personnalité. Un cours au style narratif laisse de l'espace à la personnalité de l'enseignant. Hattie a confirmé dans son étude que l'enseignant est, après l'élève et ses parents, le facteur le plus important influençant l'apprentissage. Pour que l'apprentissage soit une réussite, il est donc important qu'il existe un dialogue entre les élèves et l'enseignant qui ne réduise ni l'élève, ni l'enseignant à des exécutants[20].

Les interviews menées avec mes collègues montrent que beaucoup d'enseignants de mathématiques ont peur de raconter des faits historiques dans la mesure où l'histoire des mathématiques n'est pas leur champ d'expertise. Or d'après Kubli, l'important n'est pas l'exactitude absolue de ce que nous racontons, l'important est plutôt le fait de raconter et son effet sur l'apprentissage de nos élèves[21].

Les enseignants sont rarement confrontés à des contenus historiques durant leur formation. D'après Hans Niels Jahnke, cela conduit forcément à une certaine insécurité[22].

Il y a pourtant une grande variété de méthodes permettant de montrer aux élèves que les mathématiques sont une science qui a évolué tout au long de l'histoire, et les plus-values qu'enseignants et élèves peuvent en tirer sont nombreuses. Certains enseignants, comme Man-Keung, en sont certains :

« The study of history of mathematics, though it does not make me a better mathematician, does make me a happier man who is ready to appreciate the multidimensional splendour of the discipline and its relationship to other cultural endeavours. It does enhance the joy derived from my job as a mathematics teacher when I try to share this kind of feeling with my class. I attempt to sow the seeds of appreciation of mathematics as a cultural endeavour in them. It is difficult to tell when these seeds will blossom forth, or whether they ever will. But the seeds are there, and I am content[23]. ».

Selon Klein, l'histoire des mathématiques ne serait pour l'enseignement qu'une tromperie des élèves dans l'intention positive de leur transmettre un minimum de connaissances mathématiques. Il s'exprime donc en faveur de cette fraude pour des raisons pédagogiques.

« Durch das natürliche Werden einer Sache wird der Leser unwillkürlich mitgezogen ; daß er dabei den Dingen näher zu kommen glaubt, obwohl er nur ihre äußere Form erfaßt, darin liegt eben jene „pia fraus", ohne welche eine pouläre Darstellung dieses streng abgeschlossenen Gebietes kaum wird auskommen können[24]. ».

Un sujet mathématique devient plus significatif pour les élèves s'il leur a donné l'occasion de découvrir l'histoire qui se trouve derrière. En effet, les résultats et techniques connus aujourd'hui se sont

[19] Kubli p. 103 [traducation personnelle]
[20] Kubli p. 53 [paraphrasé]
[21] Kubli p. 31 [traduction personnelle]
[22] *Mathematik Lehren* N° 91 p. 5 [traduction personnelle]
[23] Mayer citant Man-Keung 2000, p. 8
[24] Mayer p. 12 citant Behr 1996 p. 31 citant Klein 1979

développés à partir d'un besoin concret ; un retour à la genèse d'une théorie est bénéfique à sa compréhension[25].

D'après Jahnke, l'histoire des mathématiques aide les élèves à voir l'évolution des notions mathématiques, à comprendre le rôle important que les mathématiques ont dans notre vie et à découvrir le côté subjectif des mathématiques, lesquelles sont étroitement liées à des personnages et aux questions qu'ils se sont posées[26].

> Les élèves se posent effectivement des questions sur les origines de ce qu'ils apprennent. Plusieurs fois déjà, des élèves de 4^e m'ont demandé comment on calculait le sinus sans calculatrice. Je leur montre alors les tables de sinus datant du V^e siècle et le développement en série de Taylor du sinus de 1715.

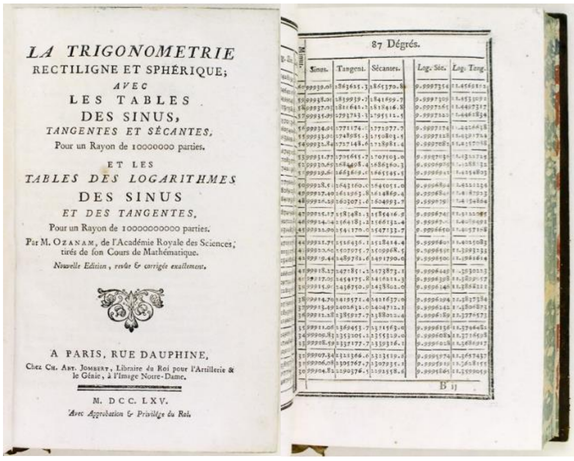


Image : https://www.librairie-du-cardinal.com/boutique/livres-d-occasion/sciences-et-medecine/mathematiques/la-trigonometrie-rectiligne-et-spherique-avec-les-tables-des/

---

[25] *Mathematik Lehren* N° 91 p. 4 [résumé]

[26] *Mathematik Lehren* N° 91 p. 4 [résumé]

4. Raconter

La culture mathématique se transmet le mieux en racontant.

Kubli cite l'auteur suisse Peter Bichsel qui a dit : « Wer nichts mehr zu erzählen hat, ist bereits gestorben. »

Beaucoup d'enseignants sous-estiment leurs capacités narratives. Tous les jours nous sommes amenés à raconter quand nous communiquons avec nos classes. La narratologie peut éclairer les processus de communication existant dans l'enseignement et leurs effets sur l'apprentissage[27].

Le meilleur moyen pour faire passer un contenu pendant un cours est l'enseignant lui-même. Selon Spitzer, ses outils les plus importants ne sont pas le tableau ou le projecteur, mais sa voix et son corps.

« Ein Lehrer muss in der Lage sein, über Sachverhalte seines Faches interessante Geschichten zu erzählen[28]. ».

Nous étudierons également les bienfaits du *story telling.*

Une deuxième définition donnée par le Larousse du mot « histoire » est :

« Récit portant sur des événements ou des personnages réels ou imaginaires, et qui n'obéit à aucune règle fixe ; anecdote visant à amuser, à divertir. »

Une histoire ou anecdote ne suit donc pas de règle fixe. On peut alors se demander s'il y a des communications qui ne sont pas des histoires. En effet, il n'est pas évident de catégoriser les différents récits et de les différencier d'autres formes de communication. Chacun peut avoir une idée légèrement différente de ce qu'est pour lui une anecdote. Cela n'empêche pas que les développements qui suivront dans ce travail seront compréhensibles pour les lecteurs. Afin de clarifier certains points, je dresse ici une liste de genres d'histoires possibles à intégrer dans un cours de mathématiques.

[27] Kubli p. 13 [traduction personnelle]
[28] Spitzer, *Lernen* p. 194

a. Formes d'histoires (que raconter ?)

Il y a plusieurs formes d'histoires qui permettent aux enseignants de rendre leur cours plus attractif.

Les exemples donnés dans ce travail à partir de la page 39 sont catégorisés selon les formes ci-dessous. Les formes se chevauchant, par endroits plusieurs formes sont indiquées. La forme peut aussi changer selon le temps que l'enseignant veut réserver à l'histoire.

i. Exercices et sources

Même si les exercices historiques ne sont pas l'objet principal de la partie pratique de ce travail, j'aimerais toutefois les aborder ici par souci d'exhaustivité. Dans les livres d'exercices on trouve de temps en temps d'anciens exercices, souvent modifiés pour que les élèves comprennent mieux le langage. En faisant souvent ce genre d'exercices, les élèves courront le risque d'ignorer le contexte de l'exercice et de se concentrer exclusivement sur les calculs[29]. Le contexte historique, les personnages et le langage mathématique ancien manquant, ces exercices ne transportent pas les élèves mentalement dans une autre époque et ne s'inscrivent pas dans les méthodes favorisées dans ce travail.

Une possibilité pour réellement incorporer l'histoire dans le cours de mathématiques est l'utilisation des textes originaux, des sources. Certes, ils sont plus difficiles à comprendre pour les élèves que des textes modifiés. Mais ils emmènent les élèves dans un monde mathématique nouveau pour eux, à une époque où les mathématiciens n'avaient pas les connaissances que les élèves ont aujourd'hui. Par l'auteur et la date du document, par les symboles et le langage différents des nôtres, le voyage dans une époque différente peut commencer. Puisqu'un texte-source nécessite d'être déchiffré et analysé dans son contexte historique, une recherche et une présentation par les élèves sont envisageables.

ii. Information historique

Il suffit souvent d'une courte information orale ou écrite pour rendre un cours de mathématiques plus vivant. Le nom d'un mathématicien, une date et les développements des mathématiques y relatifs font en sorte que les élèves se rendent compte que les résultats qu'ils apprennent ne sont pas tombés du ciel, mais ont été trouvés par des scientifiques. Jahnke et Richter expliquent :

« Im Mathematikunterricht kann und soll die globale Entwicklung der Mathematik nicht zum Gegenstand gemacht werden. Es kann sich nur um lokale, punktuelle Episoden drehen in der Absicht, einen Sinn für die historische Dimension der Mathematik zu entwickeln. Grundsätzlich verfährt Unterricht immer exemplarisch, auch bei mathematikgeschichtlichen Inhalten. Aus einzeln "Mosaiksteinchen" entsteht nach und nach ein Verständnis für Mathematik als ein lebendiges, sich entwickelndes Wissensgebiet[30]. ».

Les élèves, et parfois même les enseignants, n'ont pas de notion de l'âge des théorèmes qu'ils apprennent (ou enseignent). Au secondaire, on alterne rapidement entre des notions connues depuis

[29] Mayer pp. 62-64 [résumé]
[30] *Mathematik Lehren* N° 151 p. 3

des milliers d'années et des notions du XIXe siècle. Il me semble important de donner aux élèves le contexte historique pour qu'ils puissent poser les tesselles dont parlent Jahnke et Richter afin d'obtenir la mosaïque de l'histoire des mathématiques.

iii. Curiosités et tours de magie

Le mot « curiosités » est emprunté au latin *curiositas* qui signifie « désir d'apprendre de nouvelles choses ». Les mathématiques, et surtout l'arithmétique, sont pleines de surprises, de curiosités. L'étonnement est un moyen performant pour éveiller l'intérêt pour un sujet. Ce qui nous fascine éveille durablement notre curiosité. Montrer une curiosité pendant un cours ne prend pas beaucoup de temps et l'effet est presque garanti car nous sommes tous fascinés par les très grands nombres, les résultats étonnants et les dimensions qui dépassent notre imagination. Les curiosités se cachent partout : dans la nature, en géométrie et derrière chaque nombre il est possible de découvrir une information étonnante.

Herget et Merziger recommandent d'intégrer les élèves dans l'analyse de curiosités mathématiques en posant une série de questions telles que : « Quel résultat estimez-vous ? Qu'est-ce qui vous semble étonnant ? Comment peut-on expliquer ce résultat[31] ? ».

La façon dont un tour de magie est présenté va nous garantir l'attention des élèves. Le tour crée l'envie d'être le premier à en trouver le fonctionnement. Si un enseignant donne de temps en temps une énigme à résoudre à ses élèves, cela les motive à écouter aussi le reste du cours. Souvent les tours de magie sont des énigmes demandant une approche logique qui peut être utile en mathématiques. Le principe de récurrence, de permutation, la combinatoire, les puissances, pour ne donner que quelques exemples, sont souvent utiles pour trouver la solution d'une énigme. Ainsi, les élèves peuvent perfectionner leur raisonnement logique dans un cadre ludique.

iv. Paradoxes

Le mot paradoxe est emprunté au grec *paradoxos* qui signifie « opposé au sens commun ». Un paradoxe est un fait qui paraît défier la logique parce qu'il présente des aspects contradictoires. Il faut noter que dans le contexte mathématique, le mot paradoxe est utilisé à tort. En effet, ce qui semble un paradoxe à l'amateur ne l'est pas pour un mathématicien qui sait démontrer le résultat « paradoxe ». Cela étant dit, en mathématiques on trouve une multitude de résultats dits paradoxes, parfois très connus. Ils provoquent une réflexion plus profonde sur un sujet. Les paradoxes nous insécurisent légèrement, nous poussent au bout de notre compréhension. Ce qui nous amène à nous poser des questions peut développer le goût de l'apprentissage. Les paradoxes peuvent souvent être mis dans leur contexte historique avec leur auteur et les mathématiciens qui, souvent des siècles plus tard, en ont trouvé une explication logique.

[31] *Mathematik Lehren* N° 181 p. 4

v. Anecdotes et blagues

Une anecdote (du grec anekdotos = non encore publié) est un bref récit d'un fait curieux ou pittoresque, susceptible de divertir. Une anecdote est souvent relative à une personne, une couche sociale ou une époque et la caractérise bien. Souvent une anecdote a une pointe. L'anecdote est le moyen de combiner culture générale et connaissances mathématiques tout en générant des émotions.

Une anecdote peut avoir un personnage historique comme centre de l'histoire, mais elle peut aussi être personnelle, porter sur la vie de l'enseignant. Beaucoup d'enseignants hésitent à raconter des épisodes de leur vie personnelle. Mais une telle information n'a pas besoin d'être très privée, ni même véritable. Il suffit qu'elle ait un rapport avec la vie quotidienne et qu'elle génère des émotions pour que les élèves retiennent mieux le sujet.

Une anecdote peut aussi être une blague. Évidemment ici, il faut faire attention à ne pas confondre le cours de mathématiques avec un spectacle.

L'origine du mot allemand « Witz » est *videre*. Le mot « Wissen », en français « savoir », dérive du même mot latin[32]. La pointe d'une blague est justement le point qu'il faut comprendre, d'où son intérêt pédagogique. En effet, les élèves sont fiers s'ils comprennent une blague de l'enseignant : ils ont le sentiment de faire partie d'un groupe restreint de personnes à même de saisir une blague mathématique. Et cela peut leur permettre de mieux retenir un point vu pendant le cours.

[32] Kubli p. 44 [traduction personnelle]

b. Les avantages (pourquoi raconter ?)

Les avantages d'un style narratif dans l'enseignement sont nombreux et bien connus. Les neurobiologistes sont d'avis que nous retenons mieux ce que nous apprenons quand des petites histoires, surtout celles qui génèrent des émotions, font partie du cours. Dans cette partie nous verrons quelques effets positifs des histoires dans les cours de mathématiques.

i. L'apprentissage d'un point de vue scientifique

Les émotions jouent un grand rôle dans l'apprentissage. Elles assurent un intérêt pour la matière et contribuent à une meilleure mémorisation.

D'après le neurobiologue Stanislas Dehaene, qui est aussi président du Conseil scientifique de l'Éducation nationale française, les émotions négatives seraient néfastes pour l'apprentissage. Dans l'émission *Grand bien vous fasse*, il évoque des modèles de stress réalisés sur des cerveaux de souris. Les souris les plus stressées présentent une fermeture précoce de la plasticité cérébrale. Elles savent donc moins bien apprendre. D'après Stanislas Dehaene, il existerait ce qu'il appelle le « stress mathématique ». Les élèves stressés par les mathématiques seraient bloqués dans leur apprentissage. Des émotions telles que l'humour ou la surprise en revanche pourraient réduire le stress et favoriser l'apprentissage[33].

Les émotions positives que l'enseignant peut transmettre en cours font en sorte que l'élève s'intéresse au contenu ; l'apprentissage semble alors autodéterminé. L'élève a l'impression d'avoir choisi d'apprendre la matière. L'apprentissage autodéterminé est plus efficace que l'apprentissage dirigé puisque le cerveau utilise des stratégies métacognitives, méta-motivationnelles et méta-émotionnelles[34].

Contrairement à ce que l'on pourrait penser, ce ne sont pas seulement les émotions qui sont retenues, mais aussi, et particulièrement, l'essentiel des faits liés à ces émotions. C'est l'effet qui est responsable du fait que nous nous souvenons de ce que nous étions en train de faire quand le World Trade Center à New York a été réduit en cendres. Ou encore où nous étions au moment où nous avons reçu la nouvelle de la mort de Lady Diana. Nous nous souvenons mieux de certaines vacances que d'autres. Celles que nous gardons en mémoire sont celles que nous associons à quelque chose d'émotionnel. Roth écrit que des recherches ont montré que cet effet est indépendant du contenu à retenir[35]. C'est-à-dire que cet effet peut être mis au profit de n'importe quel cours.

« Man erinnert sich an Dinge, je stärker sie von emotionalen Zuständen begleitet werden (Eagle 1983, Mandl/Huber 1983). […] Der zeitbedingte Verfall von Erinnerungen setzt insgesamt weniger rasch ein, wenn Emotionen an die jeweiligen Informationen gekoppelt sind. Dabei wird das Kerngeschehen besonders gut erinnert[36]. »

---

[33] https://www.franceinter.fr/emissions/grand-bien-vous-fasse/grand-bien-vous-fasse-24-octobre-2018
[34] Brandstätter p. 224 citant Pekrun 2006 [traduit et résumé]
[35] Roth p. 181 [paraphrasé]
[36] Gieseke p. 84

Les anecdotes ne sont pas retenues seules ; le contenu du cours, essentiel, l'est aussi. Dans le cas de l'enseignement, ce serait le cours. Des expériences ont montré que plus un film fait une large part à l'émotionnel, mieux le détail de l'action sera retenu[37]. La publicité utilise également ce procédé. Il ne sert à rien de mettre en avant les avantages du produit si les informations ne sont pas accompagnées de petites histoires touchantes ou drôles[38].

Par les moments émotionnels, l'enseignant crée une atmosphère agréable, propice à l'apprentissage ; il crée également une bonne relation enseignant-élève. Ce sont les enseignants qui ont raconté des histoires qui m'ont le plus marquée et c'est de leurs cours que j'ai retenu le plus de matière. Ce sont aussi les enseignants que je ne voulais pas « décevoir » ; de ce fait, je révisais mieux leurs cours. Il est évident qu'un élève s'intéresse plus à une matière si l'enseignant est convaincu de l'utilité et de la beauté de ce qu'il enseigne. Les neurones miroirs, qui aident à apprendre en imitant les personnes de notre entourage, sont aussi responsables des émotions que nous pouvons éprouver quand nous écoutons quelqu'un raconter[39]. Ainsi l'enthousiasme de l'enseignant pour un sujet peut se transmettre aux élèves ; de la même manière, le suspense qu'il crée leur donne envie de connaître la suite.
La publicité utilise les émotions afin d'ancrer en nous un lien entre une situation émotionnelle et une entreprise. Nous retenons le nom et le champ d'activité d'une entreprise si nous y sommes confrontés souvent, ou si nous associons l'histoire d'une publicité avec cette entreprise[40].

D'après les enseignants interviewés, les professeurs d'histoire seraient les champions du *story telling*. Leurs cours ne manqueraient pas de contexte et d'émotions. Ce ne serait pas le cas des cours de mathématiques, considérés comme les plus ennuyeux. Certains pensent même que leurs enseignants de mathématiques n'étaient pas compétents dans leur matière et ne s'intéressaient pas réellement aux sujets qu'ils transmettaient. Les émotions manquaient.

Néanmoins, tout ce qui suscite des émotions n'est pas forcément profitable à l'apprentissage. Les faits que certains livres scolaires mentionnent pour créer un lien avec la réalité sont souvent gênants pour l'apprentissage. Brandstätter explique l'impact important des émotions sur l'apprentissage en citant Pekrun :

« Kognitive Ressourcen: Beide Arten von Emotionen [positive und negative] können das Lernen behindern, weil sie das Arbeitsgedächtnis belasten können, wenn sie nichts mit der eigentlichen Lernaufgabe zu tun haben[41]*. »*

Il faut donc veiller à ne pas surcharger les cours d'informations.

Les curiosités, anecdotes et autres histoires qui établissent aussi un lien avec le quotidien de l'élève, seraient favorables à l'apprentissage des sciences. Spitzer en particulier explique dans ses ouvrages pourquoi des histoires le favorisent.

« [Es erscheint mir sinnvoll], überschaubare Horizonte abzustecken, handhabbare Probleme anzupacken und gelegentlich kleine Geschichten zu schreiben. Zusammen genommen erlauben diese Perspektiven dann vielleicht eine bessere Sicht auf das Ganze als systematische Darstellungen. Auch

[37] Horstmann et Dreisbach p. 94 [traduction personnelle]
[38] Iris Komarek p. 130 [traduction personnelle]
[39] Herbst p. 53 [traduction personnelle]
[40] Herbst p. 178 [traduction personnelle]
[41] Brandstätter p. 224 citant Pekrun 2006

können sie systematische Darstellungen ergänzen und einzelne Gedanken daraus vertiefen. In jedem Falle aber machen Geschichten Appetit. Und so soll es auch sein[42]*! »*

« Ein guter Lehrer wird Geschichten erzählen. Die Geschichte vom World Trade Center kennen wir alle, und wenn der Lehrer gut Geschichten erzählen kann, dann werden wir noch mehr Geschichten kennen und damit auch Geschichte. Jahreszahlen büffeln („753 kroch Rom aus dem Ei", „333 bei Issus Keilerei" etc.) ist sinnlos, solange man die Hintergründe nicht kennt. Erst die Geschichte des von einem Philosophen erzogenen Griechen, der mit einem kleinen Heer ein riesiges Reich bezwang und beherrschte, macht das Datum lebendig.

Geschichten treiben uns um, nicht Fakten. Geschichten enthalten Fakten, aber diese Fakten verhalten sich zu den Geschichten wie das Skelett zum ganzen Menschen. Wer glaubt, beim Lernen gehe es darum, Fakten zu büffeln, der liegt völlig falsch; Einzelheiten machen nur im Zusammenhang Sinn, und es ist dieser Zusammenhang und dieser Sinn, der die Einzelheiten interessant macht. Und nur dann, wenn die Fakten in diesem Sinne interessant sind, werden wir sie auch behalten[43]*. »*

Tous les élèves ont un canal sensoriel préféré. Certains préfèrent la lecture. Pendant le test ils se souviennent de l'endroit du cours qui contenait l'information demandée. Certains retiennent mieux en écoutant. Pendant le devoir en classe ils se souviennent de la voix de l'enseignant en train d'expliquer. Pour cette raison il est judicieux de raconter des anecdotes mais d'incorporer des informations historiques aussi dans le polycopié.

Il est cependant indéniable que les élèves d'aujourd'hui ont grandi dans une société de divertissement. Ils ont du mal à suivre un cours de 50 minutes. Les canaux vidéo sur internet enveloppent les informations dans des histoires assez courtes et pleines d'émotions. Ils captent aussi très rapidement l'attention du spectateur.

L'attention est indispensable à un bon apprentissage. Elle garantit que le cerveau considère les informations reçues comme importantes et qu'il les mémorise au mieux.

De plus, l'attention évite que le cerveau se concentre sur ce qui est moins important à un moment donné.

« Die Aufmerksamkeit auf einen bestimmten Ausschnitt dessen, was gerade unsere Sinne erregt, bewirkt die Aktivierung genau derjenigen neuronalen Strukturen, die für die Verarbeitung eben dieses Ausschnitts zuständig sind[44]*. »*

L'attention peut – contrairement à la motivation – avoir une source externe ou interne. Une source externe d'attention peut être par exemple un bruit ; une source interne, l'intérêt pour une certaine matière. Mais cela ne signifie pas que l'enseignant n'a pas d'influence sur l'attention interne des élèves. L'attention est dirigée par une attente. Mais cette attente ne doit pas être satisfaite à coup sûr. Quelque chose que notre cerveau connaît trop bien n'est plus une raison d'y apporter une grande attention[45]. Sachant ceci, l'enseignant doit donc essayer de capter l'attention de ses élèves en laissant de la place à un contenu inattendu. Ceci peut être fait sous forme de problèmes ouverts mais aussi, lors d'un moment de cours frontal, d'une anecdote. Plus l'attention est captée par une information

[42] Spitzer, *Nervensachen* p. 13
[43] Spitzer, *Nervensachen* p. 35
[44] Spitzer, *Lernen* p. 140
[45] Roth pp. 129-130 [résumé]

intéressante, mieux l'apprentissage se fera. L'enseignant peut accroître l'attention de ses élèves par l'aliénation, l'humour, l'exagération, la surprise ou sa propre stupeur[46].

Nous retenons donc bien tout ce qui nous semble illogique ou étonnant. Les curiosités nous rendent curieux, nous voulons en savoir davantage sur le sujet. Nous trouvons même digne d'être retenu ce que nous trouvons curieux, comme le suggère le mot allemand *Merkwürdigkeiten*.

Encore et toujours, les mathématiques déconcertent l'un ou l'autre élève. Ce qui semble évident à l'enseignant ne l'est pas toujours pour l'élève. Parfois nous nous y attendons, mais ces irritations ne sont pas toujours prévisibles. L'important est de les mettre à profit du cours. L'expression « irritation productive » convient bien à décrire ces situations. Par des paradoxes et des énigmes nous pouvons provoquer volontairement ces situations et permettre aux élèves d'admirer les possibilités des mathématiques[47].

Roth utilise l'expression « originale Begegnung[48] », rencontre originale.

Le temps libre de nos élèves est rempli de jeux vidéo de plus en plus complexes et proches de la réalité, de concerts de plus en plus pompeux qui multiplient les effets spéciaux et d'émissions télévisées coûteuses enchaînant de nombreuses actions. Même si l'école n'a évidemment pas une mission de divertissement et que l'enseignant n'est pas un présentateur, les anecdotes sont souvent un petit moment de divertissement pendant le cours et déclenchent des émotions positives chez les jeunes. Nombre d'auteurs sont du même avis. Herget et Merziger le résument très bien :

« Als Lehrerin, als Lehrer kann man mal wieder bei sich selbst anfangen, kann sich selbst hinterfragen, kann versuchen, die Sache mit "mathematisch unverdorbenem" Blick zu betrachten: Was ist das Spannende an der Sache, wo könnte der Funke überspringen?
Wir plädieren dafür, dem Mathematikunterricht hin und wieder eine gewisse Würze zu verleihen, die Routine zu durchbrechen, Geheimnisvolles, auch Anekdotenhaftes zu integrieren. Warum den Schülerinnen und Schülern nicht einmal ein Rätsel vorlegen, das sicherlich der eine oder andere der Familie am Abendbrottisch erzählen wird? Warum sie nicht einmal mit einem Zahlentrick konfrontieren den es zu entschlüsseln gilt? Keine Frage – auch oder vielleicht gerade die Auseinandersetzung mit Paradoxa, Merkwürdigkeiten und Überraschungen können Inhalte vermittelt, kann das Argumentieren, Problemlösen und Kommunizieren trainiert warden. Unsere Erfahrung ist: Auf diese Weise lässt sich bei manch einer und manch einem die Lust auf mathematische Probleme entfachen[49]. »

Tous les élèves n'apprécient pas forcément que l'enseignant raconte des anecdotes. Ils peuvent être embrouillés par celles-ci et se demander si l'histoire est importante pour leur note lors d'un devoir en classe. Il faut donc être clair : les aspects historiques, énigmes, paradoxes éventuellement présentés pendant les cours font-ils partie des révisions pour un test ou non ? Les exercices qui établissent un lien avec la vie quotidienne ou celle d'un mathématicien peuvent sembler intéressants pour certains et désorienter les autres. Certains élèves ont du mal à filtrer l'essentiel d'un exercice de mathématiques contenant beaucoup de texte. Ils préfèreraient que l'histoire autour d'un problème mathématique soit réduite au minimum d'informations nécessaires à sa résolution[50].

---

[46] Kraus dans Ralf Caspary p. 152 [paraphrasé]
[47] Herget-Merziger, *Mathematik Lehren* N° 181 p. 4 citant Schulte-Janzen 2002 [traduction personnelle]
[48] Jahnke, *Mathematik Lehren* N° 91 p. 5 citant Roth 1969 [traduction personnelle]
[49] Herget-Merziger, *Mathematik Lehren* N° 181 p. 4
[50] Kubli pp. 89-90 [résumé]

Il faut aussi laisser du temps aux élèves de s'adapter à un cours contenant des histoires. Souvent les élèves demandent si ce qui vient d'être expliqué est à réviser pour un devoir en classe. Il s'agit là d'une réaction décevante si l'on s'attend à l'étonnement de la classe mais compréhensible dans notre système scolaire. Plus l'enseignant incorporera des histoires dans ses cours, peut-être même de façon systématique, mieux les élèves pourront faire la distinction entre ce qui est à réviser et des histoires motivantes.

ii. Aspect motivateur

Certains élèves ont du mal à concevoir cette science très abstraite que sont pour eux les mathématiques. Mais il suffit à l'enseignant d'avoir quelques informations sur ses élèves pour mieux les motiver à s'intéresser aux mathématiques.

Malheureusement l'ancien préjugé que les filles sont moins bonnes en mathématiques que les garçons, est encore bien ancré dans les têtes de nombre d'entre elles. Parfois la résignation devant les mathématiques est même renforcée par leurs mères.

> Il y a quelques années, j'avais un entretien avec une élève de 9^{e} et avec sa mère. Les résultats de l'élève laissaient à désirer. La mère m'a d'abord raconté qu'elle aussi avait eu des difficultés en mathématiques. Puis elle m'a expliqué, non sans fierté, comment elle essayait de motiver et d'entraîner sa fille à faire des mathématiques. En faisant du shopping pendant les soldes, elles calculent les prix après réduction. La fille a ajouté : « Mais le nouveau prix est en général déjà marqué. »

Le nombre de mères qui racontent aux enseignants de mathématiques de leurs filles qu'elles aussi avaient eu des difficultés en mathématiques n'est pas négligeable. La plupart de mes collègues mathématiciens au Lënster Lycée ont déjà entendu des mères le dire, en présence de leur enfant. Il est très probable qu'à la maison aussi, ce genre de conversation surgisse de temps en temps. L'étudiante a ainsi l'impression que les mathématiques ne sont pas pour elle. Qu'elle n'a pas hérité de la fameuse bosse mathématique. Et que tout effort serait vain.

La mère rencontrée lors de l'entretien avait de bonnes intentions et a essayé de montrer à sa fille que les mathématiques servaient dans la vie quotidienne. Mais on peut douter que le calcul de pourcentages, superflu ou non, soit une motivation pour apprendre par exemple le théorème de Pythagore ou plus tard pour étudier des fonctions. Sa fille pourrait même tirer de cet épisode la conclusion que pour les femmes les mathématiques servent à faire du shopping. Notre devoir est de mettre la fille à la place du patron qui a décidé de la réduction sans vouloir faire une perte, ou encore de lui faire prendre conscience que ce prix n'est pas toujours marqué, et qu'être un consommateur informé est important. Et cette approche s'applique aussi aux fractions, au théorème de Pythagore et autres.

D'après une étude de Helga Jungwirth, un enseignement par questions-réponses tel qu'il est préconisé aujourd'hui n'est pas forcément le meilleur choix pour tous les élèves. En général, les garçons s'adaptent bien à cette méthode didactique puisqu'ils ont appris dès le plus jeune âge à exprimer leur opinion, à réagir rapidement et à s'auto-promouvoir. Donner une réponse à une question de l'enseignant ne les dérange pas. En revanche, les filles, même les plus talentueuses en mathématiques, sont souvent inhibées quand il s'agit de répondre à une question en plénière. Elles apprennent à peser judicieusement le pour et le contre d'une intervention et prennent le temps pour vraiment se pencher sur le problème posé[51]. Un enseignement qui mettrait davantage l'enseignant au centre de l'attention serait plus agréable pour les filles. D'où l'intérêt d'un enseignant qui aime raconter.

Une autre façon d'enthousiasmer les filles pour les mathématiques en général est de passer par les mathématiciennes. Une étude menée par Blunck confirme que les filles se sentent plus motivées pendant le cours de mathématiques par la simple mention du nom d'une mathématicienne[52]. Malheureusement les théorèmes étudiés au secondaire portent tous sans exception des noms d'hommes. Cela a évidemment des raisons historiques. L'accès à l'éducation était pendant longtemps réservée aux hommes. Les femmes avaient plus de barrières à surmonter pour faire des recherches mathématiques.

> Les lettres que Sophie Germain a écrites à Carl Friedrich Gauss montrent qu'elle a travaillé sous le pseudonyme M. Leblanc afin d'être prise au sérieux. Elle a révélé son identité plus tard à Gauss. Ce dernier l'aurait proposée pour le titre de *docteur honoris causa*, mais elle est morte avant la décision. Sofia Kowalewskaja est finalement la première femme ayant reçu un doctorat en mathématiques en 1874[53].

Les mathématiciennes ont toutefois toujours existé et elles ont contribué de façon non négligeable au développement de cette science.

> Au XIXe siècle, Mary Everest Boole travaillait au Queens College, université pour femmes. Comme les femmes n'avaient pas encore le droit d'enseigner, elles conseillaient des étudiantes à la bibliothèque de l'université[54].

En chimie, il en était de même. Un collègue chimiste raconte souvent à ses élèves l'histoire de la biochimiste Rosalind Franklin ayant fait des travaux considérables concernant la structure l'ADN. Deux collègues masculins, James Watson et Francis Crick, se sont basés sur ses travaux et ont reçu le prix Nobel. Dans son livre *La Double Hélice* (1968) Watson avoue avoir utilisé des informations confidentielles du laboratoire de Franklin[55]. Dans le même livre, il minimise le rôle de Franklin en l'appelant Rosy et en dirigeant l'attention des lecteurs sur le fait qu'elle était une femme :

« Sie tat nichts, um ihre weiblichen Eigenschaften zu unterstreichen. Trotz ihrer scharfen Züge war sie nicht unattraktiv, und sie wäre sogar hinreißend gewesen, hätte sie auch nur das geringste Interesse für ihre Kleidung gezeigt. Das tat sie nicht. Nicht einmal einen Lippenstift, dessen Farbe vielleicht mit ihrem glatten schwarzen Haar kontrastiert hätte, benutzte sie, und mit ihren einunddreißig Jahren trug sie so phantasielose Kleider wie nur irgendein blaustrümpfiger englischer Teenager. Insofern konnte man sich Rosy gut als das Produkt einer unbefriedigten Mutter vorstellen, die es für überaus wünschenswert hielt, dass intelligente Mädchen Berufe erlernten, die sie vor der Heirat mit langweiligen Männern bewahrten[56]. »

Une collègue qui enseigne l'anglais s'intéresse beaucoup aux femmes dans le domaine des sciences. Elle m'a recommandé un film sur Hypatie, la première mathématicienne connue et un livre sur le sujet des femmes dans les sciences. Elle aurait aimé connaître les travaux de ces femmes au cours de sa scolarité. Elle mentionne régulièrement la vie des femmes scientifiques dans ses cours d'anglais et remarque que cela a un impact sur ce que retiennent les filles. En donnant le choix d'un sujet d'examen

---

[51] Mayer p. 41 [résumé]
[52] Mayer p. 44 [paraphrasé]
[53] Ziegler p. 233 [résumé]
[54] Pickover p. 322 [résumé]
[55] https://de.wikipedia.org/wiki/Rosalind_Franklin
[56] https://de.wikipedia.org/wiki/Rosalind_Franklin citant Watson.

aux élèves, les filles choisissent celui en rapport avec une femme. Elles seraient donc plus motivées à réviser cette partie du cours.

En raison de circonstances historiques, les apports des femmes en mathématiques sont assez récents. Le programme du secondaire n'incluant pas les concepts mathématiques du XX^{e} siècle, il est difficile de parler des travaux de mathématiciennes en classe. Néanmoins, on peut introduire sans avoir besoin d'y investir beaucoup de temps, des extraits de biographies de mathématiciennes et ainsi montrer aux filles que les femmes sont capables de faire des mathématiques poussées. Ce faisant, les élèves filles développent une sympathie pour ces femmes qui se sont imposées dans un domaine majoritairement masculin. Ceci donne une dimension humaine au cours de mathématique très appréciée par les élèves.

Une autre population qui peut être intéressée par les biographies de mathématiciens est constituée des jeunes d'origine étrangère. Mes collègues confirment que plus un élève s'identifie avec le sujet, plus il est attentif en cours.

> Cette année quand un élève de 11^{e} m'a fait la remarque que la triangulation pour la cartographie ne peut pas être exacte puisque la Terre n'est pas plane, j'ai eu l'occasion de mentionner l'existence de la trigonométrie sphérique. L'élève qui a des origines portugaises a été particulièrement fier d'entendre que Pedro Nunes s'était rendu célèbre pour ses travaux dans le domaine.

Même si le programme au secondaire ne prévoit pas beaucoup de sujets sur lesquels ont travaillé des mathématiciens de nationalités autres que française ou allemande, on peut mentionner leur existence.

L'exactitude des mathématiques et le niveau de rigueur que nous attendons en général des élèves, surtout au cycle supérieur, peut être décourageant pour ceux dont la personnalité est plutôt créative. Pourtant, dans l'histoire des mathématiques il s'est souvent avéré utile d'appliquer une méthode créative. Les problèmes que nous traitons algébriquement aujourd'hui ont d'abord été considérés géométriquement dans de nombreux cas. La résolution d'équations du second degré en est un exemple : *Le complément quadratique d'il y a 3000* voir p. 94. Cette histoire peut motiver un élève qui trouve trop abstrait le calcul algébrique.

Les mathématiciens n'ont non seulement été créatifs, ils se sont aussi trompés. Au début du développement de la probabilité, les erreurs ont été particulièrement bien documentées. Le problème du jeu à trois portes en est un bon exemple (voir l'exemple *Le problème des 3 portes* p. 86). Le fait de mentionner ceci dans un chapitre en relation avec l'erreur historique peut d'un côté atténuer la peur chez les élèves de se tromper et d'un autre côté favoriser l'évitement de la même faute.

Les élèves ont souvent l'impression que les mathématiques sont une science morte, une science dans laquelle tout est connu et qui n'évolue plus. L'histoire des mathématiques montre que cela n'est pas vrai, que de nouveaux résultats ont été trouvés au XX^{e} siècle et que des conjectures très anciennes sont démontrées aujourd'hui à l'aide de méthodes plus performantes.

> Archimède a posé un problème dont la solution n'a été trouvée qu'en 1880. C'était un système d'équations qui demandait de calculer le nombre de bêtes d'un troupeau. Et la solution est environ $8 \cdot 10^{206544}$.

iii. Classroom Management

Les anecdotes peuvent être un bon moyen de réveiller une classe léthargique ou de rendre attentive une classe rebelle. Les éducateurs et psychologues utilisent des anecdotes plus souvent que les enseignants et ce, avec beaucoup de réussite. Une histoire est plus proche de la réalité des élèves que des idées abstraites. Ils arrivent aisément à s'identifier à un personnage d'une histoire bien choisie.

D'après Kubli, un élève rebelle peut commencer à prendre plaisir à écouter attentivement son enseignant. Ces élèves deviennent alors les meilleurs avocats du cours de l'enseignant[57].

L'enseignant peut ainsi acquérir plus d'importance auprès des jeunes. Par sa voix et par le dialogue qu'il crée avec l'auditoire, celui qui raconte fait toujours partie de l'histoire même s'il n'y intervient pas directement. Dans ce dialogue, il n'y a qu'une personne qui parle. Par dialogue, il faut entendre ici le fait que celui qui écoute répond à l'histoire racontée par les connections que son cerveau crée avec son vécu et par les réflexions qu'il fait sur elle[54].

Une classe léthargique peut aussi montrer plus d'intérêt pendant le cours de mathématiques.

> Quand je raconte une curiosité ou que je donne une énigme à résoudre à une classe, je leur dis souvent : « Voilà comment vous prouvez berner vos parents, tester vos frères et sœurs ou étonner vos amis. » Je vois alors des yeux qui brillent et je suppose que les élèves réfléchissent déjà à qui ils peuvent raconter ce qu'ils ont appris en cours de mathématiques. Au prochain cours, je leur demande s'ils ont testé l'énigme ou raconté la curiosité en question. Il y en a toujours quelques-uns qui répondent affirmativement à cette question.

Beaucoup de jeunes aiment raconter à leurs amis et à leur famille ce qu'ils ont fait à l'école. Ce n'est pas étonnant puisque l'école constitue une grande partie de leur vie. De même que beaucoup d'adultes éprouvent le besoin de parler de leur travail à leur conjoint et à leurs amis, les élèves racontent ce qu'ils ont fait à l'école. Les mathématiques, telles qu'elles sont enseignées la plupart du temps, ne se prêtent pas bien à étonner les autres. Présentées sous forme d'exercices d'application elles ne sont pas assez intéressantes et difficilement compréhensibles pour une personne qui n'était pas présente en classe. En revanche, une anecdote est facile à retenir et à transmettre. C'est ainsi que les mathématiques deviennent un sujet culturel comme la musique ou la littérature.

Kubli rapporte de la manière suivante une interview avec un élève qui aime raconter ce qu'il a fait à l'école et divertir ses camarades :

« [Geschichten] helfen Kontakte zu vertiefen, vor allem, wenn sie gute Laune verbreiten. Seine meistens in handwerklichen Berufen tätigen Kollegen hören gerne, wenn er erzählt, was er in der Schule lernt. (Dies fördert seinen Status, möchte man beifügen.) Dies gelingt ihm aber nur, wenn seine Geschichten von einem Geschehen berichten, und von darin verstrickten Menschen. Geschichten müssen einen Protagonisten haben (es kann dies auch eine Lehrperson sein). Satische Zusammenhänge wie sie in Formeln ausgedrückt werden, lassen sich nicht erzählen. Für ihn sind die Geschichten rund um Naturgesetze und ihre Erforschung das Salz, welches den Unterricht genießbar macht[58]. »

Il reste à remarquer que si une classe ne réagit pas de la façon espérée par l'enseignant, rien ne l'empêche d'arrêter au milieu de l'histoire et de continuer son cours d'une autre façon. Tout ce que

[57] Kubli p. 43 [paraphrasé]
[58] Kubli p. 263-264

l'enseignant trouve intéressant ne l'est pas forcément pour son public. Cela ne devrait pas démotiver les enseignants. Les élèves n'en veulent pas à l'enseignant s'il change de méthode en cours de route. Cela leur montre que l'enseignant sait s'adapter à sa classe. C'est une compétence à ne pas sous-estimer.

iv. Authenticité de l'enseignant

Grâce aux enseignants et aux histoires vécues dans leurs cours, il n'est pas rare de renouer avec d'autres anciens de notre lycée plus tard. Nous avons tous déjà parlé de l'un ou l'autre enseignant avec des personnes que nous ne connaissons pas. C'est un sujet très bien adapté pour briser la glace et qui peut mener à de nouvelles amitiés. Enfin, pas toujours… La dernière fois que quelqu'un m'a parlé de mon lycée, c'était un policier. La conversation était agréable, mais tout de même chère !

> À l'université de Strasbourg, les blagues et les histoires que Monsieur Mignotte racontait à ses étudiants étaient légendaires. Les étudiants de Master 1 et de Master 2 ont souvent échangés sur la blague du jour. Ainsi, pour nous expliquer que la CIA s'intéressait aux cryptographes, il nous a raconté une histoire qui nous a tous fait rire et en même temps donné envie de faire de la cryptographie. C'était celle où il était invité à un colloque de cryptographie aux États-Unis. Pendant sa pause de midi qu'il passait dans un parc, il s'était senti observé par un homme tenant un appareil photo. Il a terminé son sandwich, s'est levé de son banc et est allé demander à cet homme s'il pouvait faire parvenir les photos qu'il avait prises de lui à sa femme : elle aimerait sûrement savoir ce qu'il avait mangé à midi.

Certains auteurs sont d'avis que les enseignants pourraient essayer de cacher un manque de préparation ou de connaissances de la matière enseignée en racontant des histoires[59]. Je suis plutôt d'avis que pour raconter des histoires captivantes et utiles, il faut d'un côté bien maîtriser la matière enseignée et d'un autre préparer davantage son cours en recherchant ces histoires. Évidemment, les anecdotes ne doivent pas supplanter les autres composantes d'un cours de qualité. Kubli cite ces composantes : « Sachliche Korrektheit, klare Strukturen, angemessene Prüfungen und eine faire Benotung, Verständnis für die Schwierigkeiten der Lernenden, die Wahrnehmung ihrer Persönlichkeiten und alles, was sonst noch zum Unterrichtserfolg führt, lässt sich keinesfalls durch eine noch so gekonnte Erzählstrategie erstetzen[60]. »

Généralement, un enseignant qui sait raconter des anecdotes en rapport avec le cours est un enseignant qui connaît bien le contenu de son cours. Ne pas en raconter donne aux élèves l'impression que l'enseignant n'est pas sûr de lui ou qu'il essaie même de cacher un manque de connaissances. C'est ce que me confirment mes élèves de la classe terminale de cette année.

> Le lycée étant de création récente, le nombre d'enseignants spécialisés n'était pas encore assez grand ; notre direction a dû faire appel à des enseignants expérimentés d'un lycée voisin pour pouvoir offrir la classe terminale en question. Les élèves ont dit être fascinés par ces enseignants qui avaient un grand répertoire d'anecdotes et ont réellement fait tout leur cours sans avoir besoin de supports.

La moitié des enseignants que j'ai interviewés ont parlé de l'importance de la relation professeur-élèves. Ils estiment qu'en développant celle-ci, les élèves prennent plus de plaisir à étudier la matière.

[59] Mayer p. 38 [paraphrasé]
[60] Kubli p. 88

Plusieurs ont aussi dit que c'est en répondant à des questions supplémentaires que les élèves remarquent la compétence de l'enseignant dans son domaine ; cela renforce leur attention.

Les élèves sont reconnaissants pour tout ce qui allège le cours, mais ils attendent aussi que le cours s'écoule rapidement. C'est pour cette raison que les anecdotes racontées doivent garder un lien avec le sujet traité pendant le cours.

> Il y a quelques années j'ai travaillé dans un lycée dans lequel il y avait 5 classes de 9^e parallèles. Les enseignants de mathématiques de ces classes se sont concertés pour le choix des exercices et des méthodes. Un collègue a justifié le fait qu'il n'avançait pas aussi rapidement dans le cours avec sa classe en disant que les élèves lui posaient beaucoup de questions parfois en relation avec le cours, mais aussi de plus en plus sur d'autres sujets d'intérêt général. Le collègue nous a dit : « Ils se disent : avec celui-là, on peut bien causer. »

Le collègue avait développé une bonne relation enseignant-élèves avec cette classe. Mais il a remarqué que les élèves commençaient à profiter de cette relation et que le cours de mathématiques en souffrait. Raconter des anecdotes peut améliorer la relation enseignant-élèves sans faire perdre du temps.

Même si les élèves sont fascinés par de petites anecdotes de l'histoire des mathématiques, parfois un sujet encore plus intéressant pour eux est leur enseignant, surtout sa vie privée. Sans parler de choses réellement privées, on peut satisfaire leur appétit d'histoires personnelles et en même temps atteindre un but éducatif.

> Cette année, un élève de 11^e s'est montré très intéressé par la vie d'étudiant en mathématiques. Cela m'a permis de raconter que j'avais étudié à Strasbourg, comment se passaient les cours à l'université et comment se font les inscriptions.

Les élèves ont ainsi pu connaître le lieu de mes études et eu en même temps quelques informations sur le fonctionnement des universités. Moi aussi j'ai appris quelque chose sur l'élève qui avait posé la question : il envisage des études en mathématiques. C'était une conversation agréable, j'avais l'attention de toute la classe sans même avoir besoin de mentionner les tartes flambées et la bière !

Les exercices que nous traitons dans nos cours donnent parfois de petits indices sur les enseignants. Un problème posé peut être en relation avec son sport ou sa voiture préférés. Parfois la simple mention de l'origine de l'exercice intéresse les élèves.

> Dans ma toute première année dans ce métier, j'ai enseigné dans une classe de T1CM. Une classe très léthargique. Je pensais devoir éviter de parler de tout ce qui n'était pas strictement au programme et de tout ce qui était personnel. Comme l'année précédente j'avais enseigné dans un lycée professionnel à Lisbonne, mes cours se basaient parfois sur les cours portugais. Dans le chapitre sur les fonctions j'ai souvent utilisé des exercices que j'avais traduits du portugais. Il restait dans un exercice une trace de la traduction : l'annotation des axes d'un graphique par *altura* (hauteur) et *tempo* (temps). Une élève m'a demandé pourquoi l'annotation était en portugais. Quand j'ai raconté que j'avais enseigné au Portugal elle a été impressionnée et la classe est sortie de sa léthargie.

v. Aspect mathématique

Une démonstration aussi peut raconter une histoire. La manière de la rendre plus intéressante est d'inclure des informations sur le mathématicien qui l'a trouvée. Le fait qu'un théorème est souvent connu depuis des centaines d'années mais n'a été démontré que récemment peut être une information intéressante (voir *Fermat vantard* p. 92).

Mais une démonstration peut être une histoire elle-même et créer du suspens dans le sens où les élèves sont dans l'attente du résultat. Est-ce qu'un élève va trouver l'astuce pour arriver à la conclusion ? C'est l'enseignant qui par sa voix peut transporter l'enthousiasme pour trouver un résultat et qui crée ainsi de l'émotion. Quelques indications historiques rendent la démonstration mémorisable.

Une démonstration par l'absurde est un type de démonstration qui se raconte bien.

> Il y a quelques années, en classe de 4e, j'ai fait la démonstration que la racine de 2 est irrationnelle. C'était une classe qui ne manquait jamais de demander si on pouvait faire une pause entre les deux heures de cours. Je connaissais la démonstration depuis peu de temps seulement, ne l'ayant pas vue pendant ma scolarité. Elle m'avait fascinée. Quand je l'ai faite au tableau, j'ai vu la fascination aussi dans les yeux des élèves. Le coup de sonnette au milieu de cette démonstration est un des rares qui n'a pas tout de suite engendré la question de la pause.

Cela fait penser à Gauss qui aurait dit : « Bitte sie zu warten – ich bin fast fertig. », pendant qu'il travaillait sur une démonstration et qu'on l'informait que sa femme était à l'article de la mort[61].

> Cette année, en classe de 5e, un élève m'a demandé qui avait décidé qu'une racine carrée était toujours positive. Et d'ailleurs si tout en mathématiques n'était pas inventé par l'humanité. En discutant un peu nous sommes arrivés à la question de savoir si 1+1 était vraiment égal à 2.
>
> Le livre *Principia Mathematica* est l'un des plus importants du XXe siècle d'après la Modern Library. Il essaie de prouver que toutes les mathématiques peuvent être basées sur des principes de logique. Le livre compte environ 2000 pages et au bout de quelques centaines de pages, les auteurs prouvent que 1+1=2. Même s'il reste discutable que la logique puisse expliquer tout en mathématiques, les *Principia Mathematica* ont eu une grande influence en sciences, même linguistiques[62].

En plus des démonstrations, un aspect des mathématiques qui pose problème à certains élèves est celui des notations. Cela commence en 6e. Pourquoi est-ce qu'on utilise-t-on la lettre x pour nommer une inconnue ? (voir *Pourquoi x* p. 91). Qui a défini la lettre Π ? (C'était Euler, même si dans ses textes parfois $\Pi = 3{,}14 \dots$ et à d'autres endroits $\Pi = 6{,}28 \dots$). Les raisons pour lesquelles les notations ont été sujets à des changements peuvent donner aux élèves une meilleure compréhension et une dimension culturelle des mathématiques.

Les méthodes utilisées pour faire des mathématiques ont beaucoup changé au cours de l'histoire, depuis les os gravés de traits jusqu'à l'utilisation d'ordinateurs. Le fait que les mathématiques ont été développées à partir de constatations assez intuitives est étonnant pour les élèves. Apprendre qu'une

[61] Hesse p. 12 [paraphrasé]
[62] Pickover p. 324 [résumé]

théorie s'est développée pour répondre à un besoin réel, mais aussi le fait qu'elle s'avère parfois utile des centaines d'années après sa découverte donne aux mathématiques le lien à la vie quotidienne souvent cherché par les élèves.

Les exercices pratiques sont un bon moyen pour rendre les mathématiques plus vivantes. En classe de 4e ou 10e, on fait souvent des mesures au théodolite autour du bâtiment scolaire. Cet exercice est encore plus efficace si l'histoire de cet instrument accompagne l'exercice. Sans l'histoire, c'est un exercice pour la résolution duquel il faut d'abord prendre des mesures. Ce n'est que l'histoire qui donne du sens à cette tâche et qui permet aux élèves de mieux comprendre le théorème de Thalès et la trigonométrie.

Grâce à l'histoire des mathématiques, les élèves découvrent les différents biais par lesquels les connaissances que nous avons aujourd'hui ont été obtenues : expériences, hasard ou recherche.

Déjà en 1721, G. Berkeley a dit :

« Ob man von den Menschen eigentlich sagen kann, sie verfahren nach einer wissenschaftlichen Methode, ohne daß sie den Gegenstand, mit dem sie sich befassen, das Ziel, das sie sich gesteckt haben, und die Methode, nach der sie es verfolgen, klar begreifen[63]. »

Une collègue mathématicienne m'a dit à ce sujet que les cours de mathématiques sans histoire manquaient de logique.

Hans Niels Jahnke et Karin Richter ont écrit dans leur article introduisant le numéro 151 *Geschichte der Mathematik* du périodique *Mathematik Lehren*, résumant ainsi les bienfaits de l'histoire des mathématiques sur la compréhension :

« Alle mathematischen Ideen, Begriffe und Techniken sind irgendwann einmal aus konkreten Fragen entstanden. Geht man zu dieser Entstehung zurück, lässt sich ihre Bedeutung besser erschließen[64]. »

[63] Andelfinger p. 26 citant Berkeley, *Schriften über die Grundlagen der Mathematik*, édition de 1985
[64] *Mathematik Lehren* N° 151 p. 3

c. Technique (comment raconter ?)

Par souci d'exactitude, nous utilisons un langage très scientifique pendant nos cours de mathématiques. Ce style n'est pas forcément le meilleur pour le but que nous voulons atteindre, à savoir transmettre des connaissances à un jeune auditoire. Les jeunes sont plus réceptifs à des sujets qui leur sont présentés dans un langage courant. Un style narratif est donc mieux adapté à nos besoins[65]. « Erzählen ist eine natürliche Form, Einsichten zu vermitteln[66]. »

Raconter signifie qu'il y a un dialogue, même s'il n'y a qu'une personne qui parle. Les élèves répondent par leurs réflexions et leur compréhension de ce qui est raconté par l'enseignant. Les conférenciers qui savent raconter de façon que le public soit suspendu à leurs lèvres sont proches des auditeurs. Ils intègrent leur public dans leurs exposés, ils prévoient les réactions, ils n'ont pas peur du dialogue. Ainsi le public reste attentif. Sans vouloir être conférencier, un enseignant doit veiller à ce que les élèves soient attentifs. Cela réussit beaucoup mieux si les élèves se sentent intégrés dans le cours[67]. Les anecdotes proches de leur vie, le fait que l'enseignant ait prévu leur réaction à une énigme ou un paradoxe garantissent ce succès. En narratologie on parle de l'importance du destinataire d'une histoire émise.

Souvent les enseignants se disent qu'il y a des collègues qui ont un don inné pour raconter. Leur répertoire d'anecdotes semble presque inépuisable. Ce qu'on a tendance à oublier c'est que d'avoir un don ne signifie pas qu'on n'a pas besoin d'entraînement et un répertoire ne tombe pas du ciel mais prend du temps à se compléter.

> Ma collègue en chimie sait fasciner ses élèves avec des petites anecdotes telles que celle de la mort tragique de Pierre Curie. Il est tombé sous un camion hippomobile. Un autre collègue chimiste fait rire et en même temps réfléchir ses élèves en leur donnant des noms d'éléments chimiques qui par leur étymologie reflètent les caractéristiques des élèves. Je laisse au lecteur se faire une idée des élèves argon et brome !

D'après le prix Nobel en économie Herbert Simon, on a besoin de 10.000 heures, soit environ 10 ans, pour atteindre un niveau d'excellence dans une matière. Pour devenir un champion en *story telling*, Dieter Herbst donne entre autres les conseils suivants :

« On a le droit de copier les autres et il faut s'entraîner. Tous les grands artistes se sont inspirés de leurs pairs. C'est seulement après des années de copiage qu'un peintre ou auteur développe son propre style. Les bonnes anecdotes se transmettent de génération en génération, parfois pendant des siècles. On a tout à fait le droit d'utiliser les histoires connues en cours. Le style variera d'année en année et finira par converger avec le style de l'enseignant[68]. »

[65] Kubli p. 20 [résumé]
[66] Kubli p. 13
[67] Kubli p. 70 [traduction personnelle]
[68] Herbst p. 187 [résumé]

5. Exemples

Dans cette partie, je donne de nombreux exemples de curiosités et d'anecdotes, d'informations historiques, de textes sources, de paradoxes et d'énigmes qui peuvent parfois aussi servir d'exercices.

Chaque paragraphe renseigne le lecteur sur les chapitres liés au sujet, sur les classes (classiques et générales confondues) dont le programme prévoit les chapitres en question, et sur le type d'histoire. De nombreux paragraphes se terminent par des idées d'introduction dans le cours.

Afin de trouver rapidement un thème, un index se trouve à la fin de ce travail.

I. Les nombres

Unités d'abord *Classes :* *7^e^*

Types : Histoire *Sujets :* *Nombres*
Positions

Les élèves pensent souvent que leurs difficultés en mathématiques viennent de la langue véhiculaire. Voici un exemple qui montre que le français a un grand avantage, en tout cas en ce qui concerne la compétence *nombres et calculs*.

Les élèves ont parfois des difficultés à lire les nombres en français. Surtout les composés comme quatre-vingt-dix-neuf. Mais d'après le psychologue allemand Jochen Donczik, les enfants allemands sont les plus pénalisés par la façon dont les nombres se lisent dans leur langue maternelle. Et donc aussi les enfants luxembourgeois. En effet, en allemand ainsi qu'en luxembourgeois, on lit d'abord l'unité avant de lire la dizaine. Cela a été le cas dans de nombreuses autres langues. L'origine de cette spécificité est probablement une ancienne façon d'écrire les nombres il y a plus de 400 ans. La langue parlée dans nos régions était l'indo-germanique. On écrivait une barre pour l'unité et une croix pour dix. Ainsi treize était IIIX. Donc trois-dix, d'où l'allemand « dreizehn ». Après l'introduction des chiffres arabes, la plupart des langues se sont adaptées à l'écriture. En 1951, les Norvégiens étaient les derniers à inverser les dizaines et les unités. Jochen Donczik se prononce en faveur d'une telle inversion en allemand aussi. En effet, cela serait bénéfique pour des élèves souffrant de dyscalculie[69]. En Allemagne, l'association « Zwanzig-eins e.V. », fondée par des mathématiciens, s'engage aussi pour une inversion[70].

La façon de dire les nombres en allemand a même résulté en la mort de onze soldats allemands lors de la Seconde Guerre mondiale. L'ordre donné à l'artillerie « Faites feu, distance 7400 » («vierundsiebzighundert ») a été transmis aux soldats sous la forme 4700. Erreur qui résultait probablement de l'inversion de l'unité et de la dizaine lorsqu'on parle[71].

Pouvez-vous à présent convaincre vos élèves que les nombres en français ne sont pas si difficiles à lire ? Ou faudrait-il accepter qu'ils lisent en « belge » ?

Base 8 *Classes :* *7^e^*

Type : curiosité *Sujets :* *Nombres*
Bases

Les Yukis, un peuple indien de Californie, comptaient avec les espaces entre les doigts, dans un système de base 8[72].

[69] Hesse p. 299 [résumé]
[70] Ziegler p. 27 [paraphrasé]
[71] Hesse p. 300 [paraphrasé]
[72] Escofier p. 6 [résumé]

Carré magique | *Classes : 7e*
Type : curiosité | *Sujet : Opérations*

Un carré magique dont les sommes sur chaque rangée, sur chaque colonne et sur chaque diagonale principale sont égales à 33 (âge de Jésus Christ à sa mort) orne une entrée de la Sagrada Família à Barcelone[73].

Image: https://pxhere.com/fr/photo/1107935

Les U de la calculatrice | *Classes : 7e*
Type : curiosité, exercice | *Sujet : Diviseurs et multiples*

Les tours de magie de la calculatrice, connus par les élèves, sont souvent de nature plus littéraire que mathématique. En voici un qui permet de se souvenir du critère de divisibilité par 11.

Un nombre en U est un nombre tel que 7458. Pour l'entrer dans la calculatrice, il faut que le doigt décrive un U. Les nombres en U ont une propriété en commun : ils sont divisibles par 11[74].

Explication

Utilisons deux couleurs différentes pour les chiffres de rang pair et les chiffres de rang impair : 7458
Le critère de divisibilité nous dit de calculer 7+5-4-8=0. 0 est divisible par 11. Donc le nombre est divisible par 11. Cela marche avec tous les nombres en U puisque le dernier chiffre est le premier augmenté de 1 et le troisième chiffre est le deuxième augmenté de 1. Les chiffres écrits en gris ont donc la même somme que les chiffres écrits en noir.

Les élèves aiment sortir leur calculatrice en classe de 7e. Cette activité peut être utilisée afin d'introduire le critère de divisibilité par 11. Mais elle peut aussi servir de narration de recherche.

Et non, le « grand U » de la calculatrice n'est pas divisible par 11.

[73] Pickover p. 32 [résumé]
[74] [inspiré de] Beutelspacher p. 212

Sudoku | *Classes : 7e*

Type : curiosité | *Sujets : Démonstrations, Nombres*

Malgré le grand nombre de Sudokus que j'ai résolus pendant mes cours à l'université, je pourrais toujours en faire de nouveaux. En effet, sans compter les grilles symétriques, les rotations de grilles, les permutations de lignes et de colonnes, il y a 5 472 730 538 grilles différentes. De plus, chaque grille peut avoir plusieurs énoncés, c'est-à-dire plusieurs choix de nombres de départ.

D'ailleurs, concernant les nombres de départ, deux problèmes sont irrésolus aujourd'hui.

Le premier est celui du nombre d'énoncés minimaux. Personne ne sait combien d'énoncés existent avec un nombre minimal de chiffres de départ. Le nombre de chiffres de départ est considéré minimal si, en enlevant un chiffre, la solution n'est plus unique.

Le deuxième est celui du plus petit énoncé possible. On sait qu'il existe des Sudokus avec 17 chiffres au départ et on n'a pas trouvé d'énoncé plus petit. Mais personne n'a démontré qu'avec 16 chiffres il n'y a jamais de solution unique[75].

Nombres premiers dans la nature | *Classes : 7e*

Type : curiosité | *Sujets : Nombres premiers, Diviseurs et multiples*

Certaines espèces de cigales utilisent les nombres premiers pour se protéger contre d'éventuels ennemis. Il y a des cigales qui ont un cycle de développement de 13 ans, d'autres de 17 ans. Les cigales ont une vie très courte et intense. Elles sortent par milliers en même temps de leurs larves, dévastent une région entière, pondent des œufs et meurent. Tout cela en seulement un mois. La nouvelle génération surgit seulement 13 ou 17 ans plus tard. Elles se protègent ainsi contre d'autres insectes avec des cycles de 2, 3 ou 4 ans en minimisant les chances de sortir la même année qu'eux. Mais comment les larves « comptent » jusqu'à 13 ou 17 reste encore un mystère[76].

Nombres amiables | *Classes : 7e*

Type : anecdote | *Sujet : Diviseurs et multiples*

Les Pythagoriciens étaient fascinés par les nombres amiables. Ce sont des nombres dont la somme des diviseurs propres est égale à l'autre nombre. Comme 220 et 284. Dans la Bible, le nombre 220 est également relié à l'amitié. Jacob offre 220 chèvres à son frère Esaü. Il s'agirait d'un arrangement secret qui lie les frères[77]. L'auteur connaissait-il cette propriété ?

[75] Delahaye p. 94 [résumé]
[76] Hesse p. 272 [résumé]
[77] Pickover p. 90 [résumé]

Base 20

Type : Histoire, exercice

Classes : ***7e***
Sujets : ***Nombres***
Bases

Il n'y a rien de plus pratique en mathématiques que la base 10. D'autres bases ont cependant été utilisées pour calculer : les Mayas ont privilégié la base 20. Ils ont aussi été les premiers à utiliser un symbole pour 0, une coquille. Le symbole est bien choisi si l'on considère qu'on trouve souvent des coquilles vides[78].

En se familiarisant avec une autre base, les élèves comprendront mieux le fonctionnement de la base 10. Afin de comprendre comment on calcule en base 20, l'exemple suivant est utile. D'autres nombres des Mayas peuvent être inventés et convertis par les élèves.

Les images ci-dessous montrent les symboles correspondant aux nombres de 1 à 19, puis la construction en deux lignes des nombres plus grands. La première ligne donne alors le nombre de vingtaines, la deuxième ligne donne le nombre d'unités (entre 0 et 19).

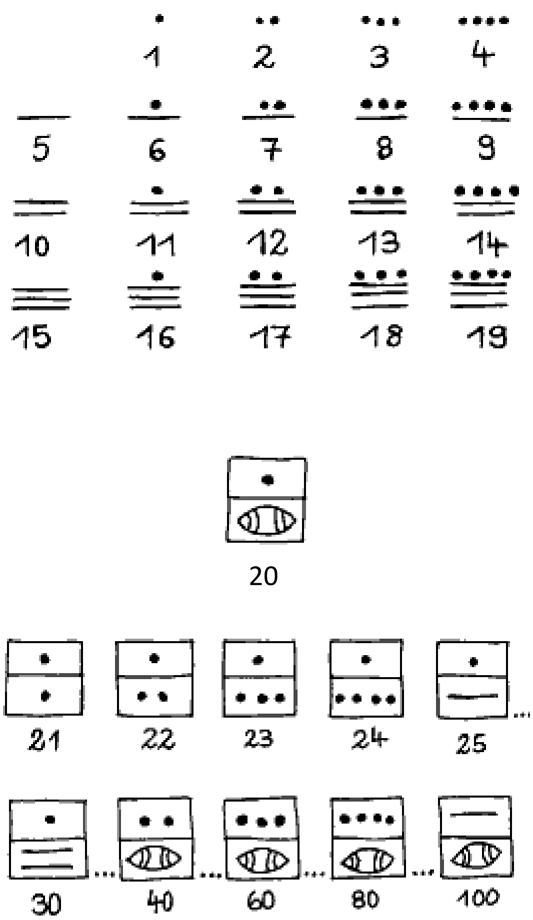


Image: http://www.labbe.de/zzzebra/index.asp?themaid=559&titelid=3254

[78] http://www.labbe.de/zzzebra/index.asp?themaid=559&titelid=3254 [traduction personnelle]

Avec ce système à deux lignes on arrive à représenter les nombres naturels jusqu’à 399. Un point dans la troisième ligne représente 400 (20^2). En procédant ainsi on peut représenter des nombres aussi grands qu’on le souhaite.

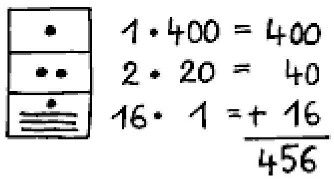


Image: http://www.labbe.de/zzzebra/index.asp?themaid=559&titelid=3254

Tour de magie I

Type : curiosité

Classes : ***7^e^, 6^e^***
Sujets : ***Opérations***
Ordre

On choisit un nombre à 4 chiffres non tous égaux[79]. On arrange ces chiffres de façon à écrire le plus grand nombre possible et le plus petit nombre possible avec ces 4 chiffres. On soustrait le petit du grand. On reprend cette procédure avec le résultat. Au bout de 7 étapes au maximum, on obtient 6174. À partir de là, le résultat reste constant. Le nombre 6174 est appelé constante de Kaprekar[80].

Les élèves aiment les tours de magie, ils sont pratiques aussi pour s’entraîner au calcul posé. Dans une classe de 7e un peu de patience est requise pour les laisser calculer.

Tour de magie II

Type : curiosité

Classes : ***7e, 6e***
Sujets : ***Opérations***
Ordre

Le public choisit un nombre à 3 chiffres tous différents (par exemple 275). Maintenant on écrit le même chiffre dans le sens contraire (dans notre exemple, 572). On soustrait le petit du grand nombre (dans notre cas 572-275=297). Puis on prend le sens contraire du résultat (dans notre cas 792). Et on additionne les deux derniers nombres (297+792=1089). Ce qui est stupéfiant, c’est que le résultat est toujours 1089, quel qu’ait été le nombre choisi[81].

[79] Au moins un des chiffres doit être différent des autres.
[80] Hesse p. 321 [résumé]
[81] Beutelspacher p. 321 [résumé]

Voyons pourquoi c'est le cas en écrivant des calculs posés :

$$
\begin{array}{rr}
 & 572 \\
- & 275 \\
 & {\scriptstyle 1\,1} \\
\hline
 & 297
\end{array}
$$

On commence à droite. Il y aura forcément une retenue puisque le chiffre le plus grand se trouve en bas. Les chiffres des dizaines sont égaux. La retenue a comme conséquence qu'il y aura un 9 aux dizaines du résultat et une nouvelle retenue pour la dernière étape. Les centaines sont les mêmes chiffres que les unités. C'est pourquoi la différence entre les chiffres des centaines est un nombre qui complète le chiffre des unités du résultat pour former 10. Mais la retenue fait que la somme des centaines et des unités du résultat ne sera que 9. La dizaine du résultat est donc 9. L'unité et le chiffre des centaines sont des nombres dont la somme est 9.

Maintenant on prend le résultat en sens contraire et on additionne :

$$
\begin{array}{rr}
 & 297 \\
+ & 792 \\
 & {\scriptstyle 1} \\
\hline
 & 1089
\end{array}
$$

La somme des unités fait 9 car les unités sont les chiffres dont on vient de dire plus haut que leur somme est 9. Au milieu on additionne deux 9 ce qui donne 18. On écrit 8 et on retient 1. À la dernière étape, on a à nouveau 2 chiffres qui ont comme somme 9. On additionne la retenue et on obtient 10.

Et voilà le résultat qui est 1089.

Ce petit tour de magie ne prend pas beaucoup de temps et se prête bien au début d'une leçon afin d'éveiller la curiosité des élèves. Pour une classe très forte, l'ébauche d'une preuve peut être un sujet de narration de recherche.

Multiplication dite « chinoise »

Types : curiosité, exercice

Classes : ***7^e, 6^e***

Sujets : ***Opérations***
Positions

Beaucoup d'élèves ont déjà visionné des vidéos intitulées « multiplication chinoise » sur internet. Je n'ai pas trouvé de source expliquant pourquoi cette méthode est dite « chinoise ». Cela semble être une légende moderne. Peut-être que les lignes utilisées évoquent pour certains des baguettes. Même si la méthode n'a jamais vraiment été utilisée en Chine, elle est intéressante et plaît aux élèves. Elle consiste à compter des nœuds et fonctionne bien pour des nombres contenant des chiffres entre 0 et 4.

Un exemple :

On représente le premier facteur en traçant le nombre correspondant de lignes pour chacun de ses chiffres en diagonale vers la droite. On fait de même pour le deuxième facteur en diagonale vers la gauche. Puis, on compte les points d'intersection des lignes. Ainsi, comme montré dans l'exemple ci-dessous, on obtient en verticale le nombre des centaines, des dizaines et des unités du résultat.

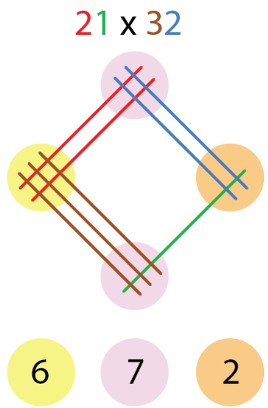


Image : http://blog.zeit.de/mathe/allgemein/multiplizieren-schnellrechnen-teil-4/

On remarque que cette méthode ne fait rien d'autre que ce que fait le calcul posé pour la multiplication.

Des idées de questions pour la découverte complète du système caché derrière cette méthode ludique se trouvent à la page 10 du journal *Mathematik Lehren* N° 195.

On peut ainsi se demander ce qui se passe quand il y a un 0 dans un nombre. Ou comment on doit procéder quand on multiplie un nombre à trois chiffres par un nombre à deux chiffres. Cette activité a permis de passer très rapidement et profitablement de nombreuses heures de surveillance.

Multiplication chinoise

Type : source

Classes : ***7e, 6e***

Sujets : ***Opérations***
Positions

Mais comment a-t-on réellement calculé en Chine ancienne ? Les chiffres arabes ont été introduits en Chine seulement au XIXe siècle. Pour représenter des nombres, en Chine ancienne (avant 200 av. J.-C.) on utilisait déjà un système comparable, à la différence principale qu'il fallait noter explicitement le nombre d'unités, de dizaines, etc. Ceci est devenu superflu avec l'introduction du zéro. Chaque nombre était représenté par un symbole. Mais pour calculer, les Chinois utilisaient des baguettes.

vertikal	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
horizontal	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱
heutige Zahlen	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Image : https://www.goethe.de/ins/cn/de/kul/mag/20629923.html

Pour l'addition et la soustraction les Chinois posaient les chiffres comme nous. La multiplication fonctionnait de la façon suivante.

On laisse un espace entre les facteurs pour noter le produit. On note l'unité du second facteur sous le premier chiffre du premier facteur. Pour la suite, considérons un exemple.

Ici on multiplie 3 par 7 et on note 21 puis on multiplie 3 par 2 et on note le résultat une position plus loin. On peut maintenant supprimer le 3 puisqu'on l'a multiplié avec tous les chiffres du deuxième facteur. On multiplie 9 par 7 et on ajoute ce résultat au produit déjà noté en réarrangeant les baguettes. Finalement on note une position plus loin le résultat de 9 fois 2. Comme il y a une « retenue », il faut à nouveau réarranger des baguettes. Pendant ces calculs on déplace d'abord le deuxième, puis le premier facteur au fur et à mesure que les calculs avancent. Ceci pour ne pas perdre le fil.

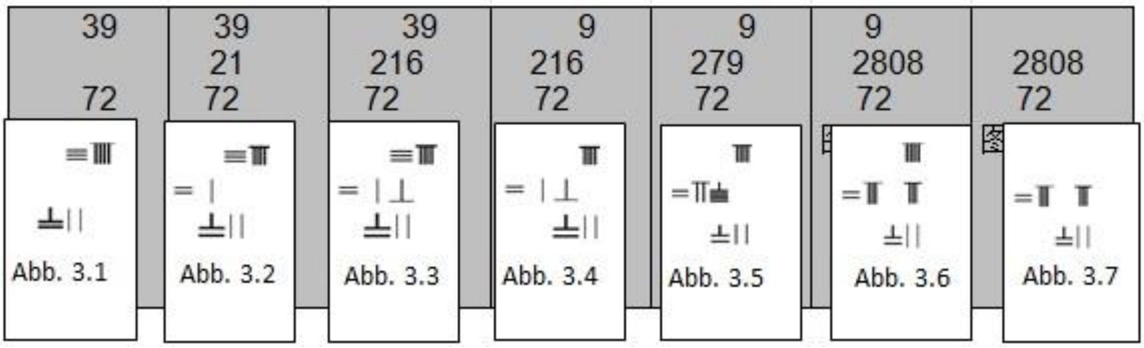


Image : https://www.goethe.de/ins/cn/de/kul/mag/20629923.html

Cette méthode ressemble au calcul posé que nous utilisons encore aujourd'hui. Mais grâce à l'introduction du 0, le calcul posé est devenu bien plus facile.

Yeah, yeah — ***Classes : 6e***
Types : anecdote, blague — ***Sujet : Nombres relatifs***

Au plus tard à partir de la classe de 6e, les élèves savent que $- \cdot -$ équivaut à $+$ et que $+ \cdot +$ équivaut aussi à $+$.

Le linguiste John Langshaw Austin a expliqué pendant une conférence que beaucoup de langues utilisaient une double négation équivalant à une affirmation, mais que dans aucune langue il n'y aurait une double affirmation équivalant à une négation. Sur cela, le philosophe Sidney Morgenbesser s'est levé et dit d'une voix dédaigneuse : « Yeah, yeah. »[82].

Millions, billions, trillions — ***Classes : 7e, 6e, 5e***
Type : Histoire — ***Sujets : Nombres, Puissances***

Les préfixes des grands nombres ont été imposés par le français Nicolas Chuquet au XVe siècle. Il a choisi d'appeler les mille milliers : million 10^6. Puis billions pour $(10^6)^2$ et trillions pour $(10^6)^3$. 100 ans plus tard, c'est Jacques Pelletier du Mans qui propose d'appeler milliard 10^9[83].

Aux États-Unis, on utilise une autre dénomination des grands nombres. Ainsi 10^9 est « a billion » et 10^{12} « a trillion ». Cette variante est plus jeune et date du XVIIe siècle. Elle aussi a ses origines en France, mais n'a pas su supplanter celle de Chuquet en Europe.

Bien que ces deux dénominations aient coexisté depuis des siècles, c'est seulement en 1975 que la mathématicienne Geneviève Guitel a baptisé « échelle longue et échelle courte » les deux systèmes[84].

Calcul de pourcentage douteux — ***Classes : 7e, 6e, 5e***
Type : anecdote — ***Sujet : Pourcentages***

Un article du journal *Goslarsche Zeitung* a publié l'article suivant le 22 mai 2004 :

« Jede fünfte erwerbstätige Mutter in Deutschland arbeitet zumindest gelegentlich auch an Sonn- und Feiertagen. In Ostdeutschland arbeitet jede zweite Mutter mit Kindern unter 18 Jahren an Sonn- und Feiertagen (49 Prozent), im Westen tut dies etwa jede Dritte (38 Prozent)[85]. »

---

[82] Hesse p. 108 [traduction personnelle]
[83] Escofier p. 50 [résumé]
[84] https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89chelles_longue_et_courte [paraphrasé]
[85] Hesse p. 15

Le 1 est souvent premier

Type : curiosité

Classes : 7^e^, 6^e^, 5^e^
Sujets : Nombres Pourcentages

Une liste de nombres peut contenir des informations horaires, des longueurs, des votes... Quelle est la probabilité qu'un nombre d'une liste commence par un 1 ? Considérant que les nombres peuvent commencer par un chiffre entre 1 et 9, on devrait s'attendre à une probabilité de 11,1% pour chaque chiffre. Mais la loi de Benford dit que dans une liste quelconque de nombres, 30% des nombres commencent par un 1 ! Même la suite de Fibonacci vérifie la loi de Benford[86].

Certains bureaux d'imposition utilisent la loi de Benford sur des échantillons de déclarations fiscales[87].

À tester !

Même Euler s'est trompé
Type : anecdote

Classes : 7e, 6e, 5e
Sujet : Nombres premiers

Euler pensait que 1 000 009 était un nombre premier[88]. Mais 1 000 009 = 293·3413

Il a pourtant montré en 1772 que $2^{31}-1$ est un nombre premier. Durant presque 100 ans personne n'a publié un nombre premier plus grand[89].

Ses capacités pratiques n'étaient apparemment pas des meilleures non plus. Le roi Frédéric II de Prusse lui avait demandé de calculer la force des roues nécessaire afin d'élever de l'eau dont il avait besoin pour une fontaine, jusqu'à un réservoir. Dans une lettre à Voltaire, Frédéric s'est plaint de son moulin qui n'était pas capable de transporter une goutte jusqu'au réservoir[90].

Fermat, champion de la décomposition en facteurs premiers
Type : anecdote

Classes : 7e, 6e, 5e
Sujet : Nombres premiers

En 1643, Mersenne a écrit à Fermat pour lui demander si 100 895 598 169 était un nombre premier. Fermat a répondu que non et que sa décomposition en facteurs était $898\,423 \cdot 112\,303$. Il a trouvé ce résultat en quelques heures et jusqu'à ce jour personne ne sait comment il a procédé[91].

[86] Pickover p. 274 [résumé]
[87] Ziegler p. 85 [paraphrasé]
[88] Hesse p. 53 [paraphrasé]
[89] http://primes.utm.edu/notes/by_year.html [traduction personnelle]
[90] www.wikipedia.fr/Euler citant Frédéric II de Prusse [résumé]
[91] Hesse p. 93 [résumé]

Puissances de 3 **Classes :** ***6e, 5e***
Type : Curiosité **Sujet :** ***Puissances***

La fraction $\frac{1}{9999999997}$ donne les puissances de 3 car elle est égale à $0{,}0000000001000000000300000000090000000027000000008100000000243\ldots$ [92]

Une explication se trouve dans le chapitre V. Calcul littéral (voir *Puissances de 3 (le détail)* p. 97)

Multiplication magique ? **Classes :** ***6e, 5e***
Type : curiosité **Sujet :** ***Calcul littéral***

Cette année, une élève de 5e était très fière de me montrer cette méthode. Elle fonctionne bien pour multiplier deux nombres a et b de l'intervalle [50 ; 99]. On détermine le nombre x qui manque à a pour faire 100 et le nombre y qui manque à b pour faire 100. Alors on a :

$$ab$$
$$= (100 - x)(100 - y)$$
$$= 100^2 - 100y - 100x + xy$$
$$= 100(100 - y - x) + xy$$
$$= 100(b - x) + xy$$

La dernière ligne nous permet de multiplier facilement 96 par 81 par exemple[93] :

$$100 - 96 = 4$$
$$81 - 4 = 77$$
$$77 \cdot 100 = 7700$$

$$100 - 81 = 19$$
$$4 \cdot 19 = 76$$

Résultat final : $7\,700 + 76 = 7\,776$

Les autres élèves se sont interrogés sur le fonctionnement de cette méthode. Avec quelques connaissances en calcul littéral, ils peuvent le suivre aisément.

[92] Delahaye p. 136 [paraphrasé]
[93] [inspiré de] Beutelspacher p. 215

De la Terre à la Lune à l'aide d'une feuille de papier ***Classes : 6e, 5e***
Type : curiosité ***Sujet : Puissances***

Combien de fois doit-on plier une feuille de papier pour qu'elle devienne aussi épaisse qu'elle ferait un pont de la Terre jusqu'à la Lune ? Même si en réalité on n'arrive pas à plier une feuille plus de 6 ou 7 fois, la réponse est un nombre étonnamment petit : 42 fois.

Si on part d'une feuille ayant une épaisseur de 0,1 mm, l'épaisseur double à chaque fois qu'on plie la feuille. Au bout de n pliages, on a une épaisseur de $0{,}1 \cdot 2^n\ mm$. Avec $n = 42$, on obtient environ $439\ 805\ km$ d'épaisseur. Étant donné que la distance entre la Terre et la Lune est d'environ $360\ 000\ km$, cela est suffisant[94].

Cette curiosité illustre bien la croissance rapide des puissances de 2. Elle sert de belle introduction aux puissances, ou encore de narration de recherche pour les classes ayant déjà une notion des puissances à exposants positifs.

Papyrus Rhind ***Classes : 6e, 5e***
Type : Source ***Sujet : Puissances***

Les élèves savent-ils de moins en moins bien calculer ? Le problème suivant est généralement très vite résolu par une grande partie des élèves, mais serait resté insoluble pendant des milliers d'années.

Le papyrus Rhind contient 5 mètres de problèmes mathématiques et fait de l'Égyptien Ahmès (~ 1650 av. J.-C.) le plus ancien auteur de mathématiques connu. Son problème le plus célèbre est le suivant : « Sept maisons contiennent sept chats. Chaque chat tue sept souris. Chaque souris a mangé sept épis de blé. Chaque épi aurait rapporté sept hekats (unité de mesure valant environ 4 785 litres) de blé. Combien y a-t-il de maisons, de chats, de souris et de hekats[95] ? ».

Un ancien problème très court à résoudre, qui donne de la confiance aux élèves.

Conjecture de Catalan ***Classes : 6e, 5e***
Types : curiosité, Histoire ***Sujet : Puissances***

En 1844, Catalan a conjecturé que 8 et 9 sont les seules puissances d'entiers consécutives. Cette conjecture n'a été prouvée qu'en 2002[96].

---

[94] [inspiré de] Beutelspacher p. 29
[95] Pickover p. 36
[96] Pickover p. 236 [résumé]

Petite blague sur les puissances de 10 *Classe : À partir de la 6e*
Type : blague *Sujet : Puissances*

$$10^{12}\ microphones = 1\ megaphone$$ [97]

Faux ou utile ? *Classes : À partir de la 6e*
Type : curiosité *Sujet : Fractions*

Une erreur très commune des élèves du cycle inférieur est la suivante :

$$\frac{2}{5}+\frac{2}{3}=\frac{4}{8}$$

Évidemment cela n'est pas une addition correcte de deux fractions.

Néanmoins le nombre « somme des numérateurs sur somme des dénominateurs » a une propriété intéressante : il est toujours compris entre les deux fractions de départ.

Si $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, alors $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$

Une démonstration très intuitive de cet encadrement est ce que Biermann et Blum appellent un « Schorle-Beweis » ; faute d'une traduction de « Schorle » en français, on pourra ici l'appeler une « démonstration par monaco ».

Disons que la fraction $\frac{a}{b}$ est un monaco composé de a parts de grenadine sur b parts de bière et que la fraction $\frac{c}{d}$ est un monaco composé de c parts de grenadine sur d parts de bière. Supposons que le monaco $\frac{a}{b}$ est très clair avec peu de grenadine alors que le monaco $\frac{c}{d}$ est très foncé avec beaucoup de grenadine. Si maintenant on verse les deux verres dans un seul récipient, on obtient un monaco plus foncé que le premier, mais plus clair que le second. Dans ce nouveau monaco il y a $a+c$ parts de grenadine et $b+d$ parts de bière[98].

Cette « fausse addition » peut d'ailleurs être utile. Si, par exemple, une équipe de football a un rapport de buts de $\frac{a}{b}$ aux matchs aller et de $\frac{c}{d}$ aux matchs retour, alors son rapport de buts pour la saison est $\frac{a+c}{b+d}$.

Les élèves qui font cette erreur seront contents qu'on puisse l'utiliser pour un calcul utile. Si de plus ils sont footballeurs, ils sauront s'y identifier. On peut espérer qu'ils ne referont plus cette faute.

[97] Hesse p. 62 [traduction personnelle]
[98] Hesse p. 46 [traduction personnelle]

Multiplication originale — ***Classes : À partir de la 6e***
Types : curiosité, paradoxe — ***Sujet : Fractions***

Autre erreur : lors de la multiplication de deux fractions, on ne peut évidemment pas simplement accoler les chiffres des numérateurs et ceux des dénominateurs comme montré ci-dessous.

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{5} = \frac{18}{45}$$
$$\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{3} = \frac{14}{63}$$
$$\frac{4}{9} \cdot \frac{9}{8} = \frac{49}{98}$$

Ou peut-on ? En vérifiant, on remarque que les résultats sont tous justes[99].

L'effet est encore plus surprenant si vous expliquez que vous allez juste accoler les chiffres pour les multiplier. Les élèves diront d'abord que cela donnera un résultat erroné, puis seront d'autant plus étonnés que le résultat est juste.

$\sqrt{2} = 2$ — ***Classes : 5e***
Type : paradoxe — ***Sujet : Racines***

Considérons un carré d'une longueur de côté 1. La longueur de sa diagonale est alors $\sqrt{2}$.

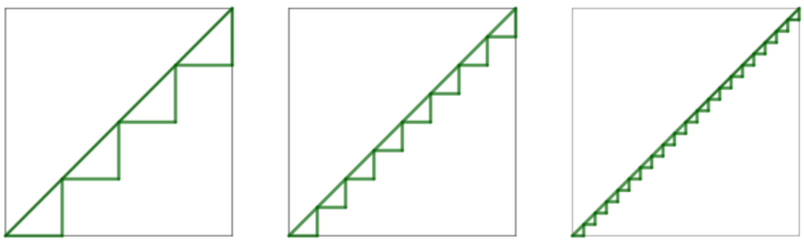


Image réalisée avec Geogebra

En effet, la longueur de l'escalier est toujours égale à 2 quel que soit le nombre de marches. Et géométriquement l'escalier converge vers la diagonale. Mais sa longueur non[100].

[99] [inspiré de] Hesse p. 63
[100] *Mathematik Lehren* N° 181 [résumé]

Secret du format DIN A ***Classes : 5e***
Types : curiosité, exercice ***Sujet : Racines***

Le format DIN A pour le papier est un format plus intéressant qu'on ne le pense. Si on part d'une feuille A4 et qu'on la plie, on obtient le format DIN A5. C'est une feuille qui a les mêmes proportions entre longueur et largeur que la feuille A4. Il en va de même avec les formats A0, A1, ... A8. A0 est défini comme une feuille d'une aire de $1\ m^2$ avec la propriété voulue qu'en pliant le papier, les proportions restent les mêmes. Par exemple, commençons par une feuille carrée avec une photo carrée de mon chien au milieu, bien centrée. En pliant la feuille, on obtient une feuille rectangulaire. Si je fais une photocopie de la feuille avec le chien dans un format plus petit, la photo ne sera plus joliment centrée. Il y aurait un bord blanc en haut et en bas de la feuille. Le format DIN A évite ce problème en conservant les proportions[101].

Quel doit alors être le rapport entre longueur et largeur d'une feuille au format DIN ?

Prenons une feuille A4 et appelons a sa longueur et b sa largeur. Plions la feuille. La nouvelle feuille A5 a alors comme longueur la largeur de la feuille A4, c'est-à-dire b. Sa largeur est obtenue en divsant la longueur de la feuille A4 en deux, donc $a/2$.

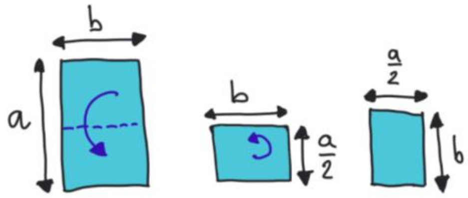


Image réalisée avec Explain Everything

Le fait que le rapport entre longueur et largeur soit toujours le même nous amène à écrire :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{\frac{a}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{2b}{a}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 2b^2$$

Et comme a et b sont positifs :

$$a = \sqrt{2}b$$

Donc la longueur est $\sqrt{2}$ fois la largeur pour toutes feuilles de la norme DIN A. Cette démonstration est un bon exemple des mathématiques qui se cachent derrière le quotidien des élèves.

[101] [inspiré de] Beutelspacher p. 107

Racine dangereuse ***Classes : 5e***
Type : blague ***Sujet : Racines***

x^2 part de chez lui pour se promener. Mais c'est x qui rentre à la maison.

Tout le monde s'interroge, s'inquiète, et finalement il se confesse :

« Je suis allé dans la forêt et je suis tombé sur une racine. »

Morts de Mersenne et de Descartes ***Classes : Toutes***
Types : anecdote, Histoire ***Sujet : Histoire***

« Mersenne est mort le premier septembre 1648, après avoir bu, dit-on, trop d'eau fraîche avec Descartes par une chaude journée d'août[102]. »

« La jeune reine de Suède, Christine […], cause la mort de Descartes ; elle l'invite en Suède et lui demande des leçons de philosophie à cinq heures du matin. Lui qui depuis longtemps se levait très tard attrape une pneumonie[103]. »

Mathématiques et calcul ***Classes : Toutes***
Types : anecdote, blague ***Sujet : Opérations***

Parmi les mathématiciens, il est connu que les meilleurs chercheurs ne sont pas toujours les plus forts en calcul. Pour les élèves, qui souvent mécomprennent les mathématiques pour du calcul, cela est moins évident à s'imaginer. Il y a eu dans le passé des mathématiciens tels que Gauss et Euler qui calculaient extrêmement vite avec les grands nombres. Mais les mathématiques ont des champs purement théoriques et ne nécessitent aucun calcul ; s'il y en a, ils se font à l'aide d'un ordinateur, si bien que les mathématiciens n'ont pas besoin de savoir calculer de tête.

Ainsi le professeur allemand Kummer avait du mal à calculer $9 \cdot 7$ pendant un cours à l'université. Un étudiant proposa alors : « 61 » ; ce que Kummer nota de suite au tableau. Un autre étudiant intervint : « Non, c'est 67 monsieur le professeur ! ». Kummer, un peu déstabilisé, avança : « Allez, décidez-vous, c'est l'un ou l'autre[104]. »

[102] Escofier p. 63
[103] Escofier p. 71
[104] Stewart p. 72 [traduction personnelle]

Grands nombres et Youtube

Types : anecdote, exercice

Classes : ***Toutes***
Sujets : ***Ordre de grandeur***
Culture générale

Les problèmes de Fermi sont déjà connus par de nombreux enseignants. Parfois il manque un contexte réel pour les jeunes. Les élèves regardent plus que jamais des vidéos, alors qu'être youtubeur est devenu un métier. On pourrait donc faire de cette anecdote un problème de Fermi.

Une question posée dans l'émission « Die 2 – Gottschalk und Jauch gegen alle » était la suivante :

« Combien de temps devrait-on passer sur Youtube sans interruption pour visionner toutes les vidéos publiées en une journée ? »

Solution : En 2018, 400 heures sont publiées par minute. Cela fait donc plus de 65 ans pour regarder une journée de vidéos. Les deux candidats avaient opté pour 16 ans.

Cette histoire peut servir de petite anecdote mais vous pouvez aussi laisser deviner et calculer les élèves.

Nombre porte-malheur

Types : Histoire, curiosité

Classes : ***Toutes***
Sujets : ***Nombres***
Combinatoire

Cette année, j'ai remarqué une renaissance des jeux de superstition chez mes élèves. Ils m'ont expliqué qu'ils peuvent invoquer des esprits à l'aide de deux crayons (soudainement ils possèdent des crayons !...). Ils savent sûrement aussi que le nombre 13 – surtout en combinaison avec le vendredi – est supposé porter malheur. Les raisons possibles de cette croyance seraient que Judas était le 13^{e} homme présent lors de la Cène et que Jésus serait mort un vendredi[105]. Il est d'ailleurs vraisemblable que statistiquement plus d'accidents surviennent un vendredi puisque le 13^{e} jour du mois est plus souvent un vendredi qu'un autre jour de la semaine. Afin de se convaincre de cela, il suffit de compter les vendredis treize sur une période de 400 ans : en effet, compte tenu des années bissextiles, tous les 400 ans, le calendrier se répète. La probabilité que le 13 tombe un vendredi est environ 0,5% fois plus élevé que la probabilité que ce soit un autre jour de la semaine. Cela est le cas depuis l'ajustement du calendrier grégorien, moment auquel on est passé du jeudi, 4 octobre 1582 au vendredi, 15 octobre 1582. Si on avait choisi de sauter dix jours entre un dimanche et un lundi, ce serait maintenant le lundi qui serait plus souvent le treizième jour du mois[106]. Pour la même raison que ce jour est supposé porter malheur, on pourrait aussi bien dire qu'un vendredi 13 porte bonheur, puisque plus de prix sont gagnés un vendredi 13, plus d'enfants sont nés un vendredi 13, etc.

Les classes latines s'intéresseront au fait de savoir qu'en Italie, c'est le nombre 17 qui porte malheur. Cela vient de l'ancienne écriture romaine : XVII qui est une anagramme de VIXI. Vixi signifie « je vivais », en d'autres termes : « je suis mort ».

[105] http://kalenderlexikon.de/anzeigen.php?Eintrag=Freitag%20der%2013.&Search=freitag [paraphrasé]
[106] Ziegler p. 31 [résumé]

Les chiffres arabes et les algorithmes — ***Classes : Toutes***

Type : Histoire — ***Sujets : Nombres, Algorithmes***

Quand on parle de chiffres arabes à des élèves de 7e, ils pensent souvent de prime abord que ce sont des chiffres très exotiques qu'ils ne connaissent pas encore. Mais les chiffres arabes sont ceux qu'ils utilisent tous les jours. Plus récents dans nos livres scolaires sont les algorithmes. De nombreux exercices demandent aux élèves de suivre un « algorithme ». Qui aurait pensé qu'il y a un lien entre ces derniers et les chiffres arabes ?

Al-Khwarizmi a introduit les symboles indiens pour les chiffres dans les pays arabes. Ce sont les symboles que nous appelons aujourd'hui chiffres arabes et que nous utilisons en Europe. Son livre sur l'addition et la soustraction avec les chiffres indiens a trouvé son chemin vers l'Europe à travers l'Espagne où son titre fut changé en *Algorismi de numero indorum*. De ce titre vient le mot « algorithme » qui signifie donc « règle de calcul »[107].

20 % des causes pour 80 % des effets — ***Classes : Toutes***

Types : curiosité, paradoxe — ***Sujet : Pourcentages***

Le principe de Pareto, parfois appelé aussi loi de Pareto, est nommé ainsi d'après Vilfredo Pareto, un économiste italien. Il a analysé la distribution des richesses dans différents pays d'Europe. Un cas spécial de la formule développée par Pareto est la loi des 80-20 que Joseph Juran a nommé principe de Pareto. Le principe dit que 80 % des effets résultent de 20 % des causes.

Quelques exemples qu'on trouve chez Hesse:

20 % des erreurs produisent 80 % des fautes.
20 % des clients sont responsables de 80 % du bénéfice.
20 % des produits sont responsables de 80 % des réclamations.
20 % des employés font 80 % du travail.
20 % des maladies engendrent 80 % des visites médicales.
20 % des criminels commettent 80 % des crimes.
20% des chauffeurs sont responsables de 80 % des accidents.
20 % des titres sont responsables de 80 % des ventes de livres.
20 % des efforts conduisent à 80 % des résultats[108].

Le premier exemple est particulièrement intéressant pour les élèves et fait fonction d'avocat pour les tests formatifs. Il est important d'identifier tôt les erreurs générant la plupart des fautes et de les éviter par la suite.

[107] *Mathematik Lehren* N° 91 p. 14 [résumé]
[108] Hesse p. 45 [traduction personnelle]

Tour de magie III

Types : curiosité

Classes : ***Toutes***
Sujets : ***Opérations***
Diviseurs et multiples

Imaginez un nombre à cinq chiffres non tous égaux. Écrivez un deuxième nombre à l'aide des mêmes chiffres, mais dans un autre ordre. Maintenant, soustrayez le petit nombre du grand. Puis encerclez un des chiffres du résultat. Il est possible de deviner ce chiffre en connaissant les autres.

Un exemple :

$$\begin{array}{rr} & 68572 \\ - & 27586 \\ & {\scriptstyle 1\,1\,1\;\;} \\ \hline & 40986 \end{array}$$

Si quelqu'un dicte les chiffres 4, 0, 9 et 6, il est possible de deviner que le chiffre manquant est un 8. Pour cela il suffit de faire la somme des chiffres dictés : 4+0+9+6=19 et d'annoncer le chiffre manquant pour arriver au prochain multiple de 9. En effet, le résultat est toujours divisible par 9, donc la somme de ses chiffres aussi[109].

Dans le cas où la somme des quatre chiffres connus est un multiple de 9, il y a deux possibilités pour le cinquième chiffre : un 0 ou un 9.

On peut essayer de se convaincre de cette propriété en considérant des nombres à deux chiffres au lieu des nombres à cinq chiffres :

$$\begin{array}{rr} & 52 \\ - & 25 \\ & {\scriptstyle 1\;\;} \\ \hline & 27 \end{array}$$

Dans le calcul posé, il y aura toujours une retenue puisqu'on soustrait le petit nombre du grand. La différence entre 5 et 12 et la différence entre 2 et 5 font ensemble 10. La retenue fait que la somme des chiffres du résultat n'est finalement pas 10, mais 9.

Les élèves des classes inférieures se montrent très enthousiastes face à ce tour de magie. En 7^{e} il faut s'attendre à beaucoup d'erreurs de calcul. Une bonne occasion pour le réviser…

[109] Beutelspacher p. 222 [résumé]

Multiplication à la russe

Types : Histoire, curiosité, exercice

Classes : ***Toutes***
Sujets : ***Opérations***
Diviseurs et multiples

L'écriture romaine des chiffres diffère de l'écriture arabe surtout par le fait qu'un symbole a une valeur fixe, indépendamment de sa position dans le chiffre. Dans l'écriture arabe par exemple, un 5 qui se trouve à la position des centaines signifie 500. Mais un V signifie toujours 5 dans l'écriture romaine. C'est cette différence qui nous permet de calculer facilement alors qu'avec les chiffres romains, une multiplication semble difficile à faire à la main. Mais les Romains utilisaient une méthode que les Égyptiens connaissaient déjà : la multiplication égyptienne. Le dernier pays qui l'a encore enseignée est la Russie, c'est pourquoi on appelle aussi la méthode « multiplication à la russe ».

Fonctionnement

On écrit dans deux colonnes les nombres à multiplier. Dans les lignes qui suivent, on divise successivement par 2 le nombre de gauche (on néglige le reste) et on multiplie successivement par 2 le nombre de droite. Puis on additionne tous les nombres de la colonne de droite qui se trouvent à côté d'un nombre impair de la colonne de gauche. Et voilà déjà le résultat de la multiplication.

Exemple :

18	23
9	**46**
4	92
2	184
1	**368**

$$18 \cdot 23 = 46 + 368 = 414$$

Explication

On voit rapidement que l'écriture binaire se cache derrière cette méthode. En effet

$$18 \cdot 23 = (16 + 2) \cdot 23 = 2^4 \cdot 23 + 2^1 \cdot 23 = 368 + 46 = 414$$

18 s'écrit en binaire 10010

Mais pourquoi faut-il utiliser les lignes dont le nombre dans la colonne de gauche est impair ?

Reprenons l'exemple plus haut, et ajoutons une colonne pour les puissances de deux.

18	23	2^0=1
9	**46**	2^1=2
4	92	2^2=4
2	184	2^3=8
1	**368**	2^4=16

Le seul nombre impair qui soit une puissance de 2 est 2^0. C'est pourquoi un nombre pair comme 18 s'écrit avec l'unité binaire 0, alors qu'un nombre impair s'écrit toujours avec l'unité binaire 1. Par exemple : $[21]_{10} = [10101]_2$, 21 a l'unité binaire 1.

Faisons la multiplication à la russe de 21 et de 23:

21	**23**	$2^0=1$
10	46	$2^1=2$
5	**92**	$2^2=4$
2	184	$2^3=8$
1	**368**	$2^4=16$

Une fois qu'on sait que l'unité binaire du premier facteur est 1, puisque 21 est impair, il reste à décomposer 20. La méthode nous dit de diviser 20 par 2 et de considérer 10. On compense par le dédoublement du nombre de la deuxième colonne. Comme 10 est pair, son unité binaire est 0. Cela veut dire que la deuxième position binaire de 21 est 0 et que 46 n'interviendra pas dans la somme qui forme le résultat. Cette argumentation continue jusqu'à ce qu'il y ait un 1 dans la colonne de gauche[110].

La multiplication à la russe est une alternative à la méthode que les élèves utilisent en général pour multiplier à la main. Elle donne de l'importance à la notion de nombres pairs et impairs. Pour les classes supérieures, elle peut servir d'application de l'écriture binaire.

Nombre cyclique — ***Classes : Toutes***

Sujets : Fractions, Nombres premiers, Ensembles

Type : curiosité

$\frac{1}{7} = 0{,}142857142857142857\ldots$ est un nombre périodique et la période 142 857 est un nombre cyclique. Cela veut dire qu'en multipliant ce nombre par 1, 2, 3, ...6, on obtient un nombre composé d'une permutation cyclique des chiffres de 142 857[111].

Il y a d'autres nombres cycliques qu'on trouve dans les décimales de $\frac{1}{p}$ où p est un nombre premier et la période contient $p-1$ chiffres. Mais $p=7$ donne la période cyclique la plus courte, donc visible à l'aide de la calculatrice des élèves.

Voilà une idée pour étonner les élèves.

Un élève choisit un nombre entier et le divise par 7 à l'aide de la calculatrice. Si le résultat est entier il faut qu'il choisisse un autre nombre. L'enseignant magicien peut alors deviner les 6 premiers chiffres de la partie décimale du résultat : 1; 2; 4; 5; 7; 8[112]. En effet, la partie décimale est toujours périodique et la période est de longueur 6 chiffres. Mais encore plus stupéfiant est le fait que les chiffres de la période sont toujours les mêmes, même si l'ordre change selon le dividende.

[110] [inspiré de] http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/russischebauernmultiplikation.htm
[111] Beutelspacher p. 169 [résumé]
[112] [inspiré de] *Mathematik Lehren* N° 181 p. 23

Tu peux aider à trouver des nombres premiers *Classes : Toutes*
Type : curiosité *Sujet : Nombres premiers*

Les nombres de Mersenne sont des nombres premiers qui s'écrivent sous la forme $2^p - 1$. On sait que p doit être premier. Les mathématiciens sont aussi d'avis qu'il y a une infinité de nombres premiers qui s'écrivent sous cette forme, mais personne ne l'a démontré. Les premiers nombres de Mersenne sont :

$$2^2 - 1 = 3$$

$$2^3 - 1 = 5$$

$$2^5 - 1 = 31$$

$$2^7 - 1 = 127$$

En 1644, Mersenne pensait que la liste exhaustive des nombres de Mersenne pour $p < 258$ était p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257. Aujourd'hui on sait que la liste correcte est p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127.

Entre-temps, on connaît 49 nombres de Mersenne. Mais on ne connaît que 45 nombres de Mersenne consécutifs. Il reste donc à vérifier par exemple qu'entre le 45e et le 46e il n'y a pas un autre nombre de Mersenne[113].

Pour vérifier cela, chacun peut aider en donnant un peu de capacité du processeur de son ordinateur à GIMPS *(Great Internet Mersenne Prime Search)*. On peut le faire en allant sur le site www.mersenne.com.

Le hasard existe-il ? *Classes : Toutes*
Types : curiosité *Sujet : Nombres*

Deux jeunes allemands ont conduit une étude intéressante sur les chiffres quelconques dans le cadre du concours « Jugend forscht ». Ils ont constaté qu'on peut identifier des personnes à l'aide d'un enchaînement de chiffres qu'ils choisissent au hasard. En effet, il n'est pas évident de choisir des chiffres au hasard. Les uns ont tendance à répéter certaines chaînes, d'autres utilisent certains chiffres avec une fréquence trop haute, d'autres encore ont tendance à fabriquer des suites croissantes ou décroissantes. Si on veut trouver un enchaînement au hasard, on peut prendre une partie des décimales de Pi. Personne n'a trouvé d'anomalie dans la distribution de ces chiffres[114].

Le fait qu'il est difficile d' « inventer » des chiffres au hasard permet aussi de contrôler que des élections ne sont pas truquées. Dans le nombre de bulletins comptés par bureau de vote et par candidat, les dix chiffres devraient apparaître plus ou moins avec la même fréquence. Aux élections en Iran en 2009 cela n'était pas le cas. 17% des résultats se terminaient par un 7, 4% par un 5[115].

[113] http://primes.utm.edu/mersenne/index.html [résumé]
[114] Ziegler p. 81 [paraphrasé]
[115] Ziegler p. 82 [résumé]

Mathématiques simples *Classes : Toutes*
Type : anecdote *Sujets : Histoire*

Le mathématicien John Von Neumann a dit : « Si on ne croit pas que les mathématiques sont simples, c'est qu'on ne réalise pas à quel point la vie est compliquée[116]. »

-1 personne *Classes : Toutes*
Type : blague *Sujet : Nombres relatifs*

Deux personnes entrent dans une pièce. Quelques minutes plus tard, trois personnes en sortent. Le mathématicien dit : « Si maintenant une personne entre, la pièce sera vide[117]. »

Mathémagie noire *Classes : Toutes*
Type : anecdote *Sujet : Cryptographie*

François Viète est un mathématicien français qui a découvert la loi des cosinus indépendamment d'Al Kashi. Il a aussi déchiffré des codes espagnols pour le roi français Henri IV. Quand Philippe II d'Espagne a découvert que la France connaissait ses plans militaires, le roi s'est plaint auprès du pape que ses ennemis utilisaient de la magie noire pour déchiffrer ses messages secrets[118].

Un signe change tout *Classes : Toutes*
Type : anecdote *Sujet : Nombres relatifs*

Est-ce trop sévère de retrancher un point pour un signe négatif oublié ?

En 1962, la sonde spatiale Mariner-1 est tombée dans la mer seulement 5 minutes après son décollage. Elle aurait dû arriver sur Venus au bout de 100 jours. La raison de l'accident – qui a coûté 8,5 millions de dollars – était un signe négatif manquant dans le programme[119].

[116] Ziegler p. 243 [paraphrasé]
[117] Hesse p. 163 [traduction personnelle]
[118] Escofier p. 55 [résumé]
[119] Hesse p. 220 [résumé]

Tour de magie aux pièces de monnaie ***Classes : 4e, 3e***
Type : curiosité ***Sujet : Systèmes d'équations***

Un élève choisit un certain nombre de pièces de monnaie. Prenons par exemple 6 pièces. Puis l'élève choisit deux facteurs a et b, par exemple 2 et 4. Tous ces nombres sont connus par l'enseignant magicien. L'élève prend alors un certain nombre G de pièces dans sa main gauche et le reste (D) dans sa main droite, sans révéler leur répartition. On lui demande de calculer $a \cdot G + b \cdot D$. Il est alors possible de « deviner » le nombre de pièces qui se trouvent dans la main droite.

Dans notre exemple, supposons que l'élève prend 3 pièces dans chaque main. Le résultat est alors 18. Intuitivement on peut raisonner de la façon suivante :

Si toutes les pièces sont dans la main gauche alors le résultat est $2 \cdot 6 + 4 \cdot 0 = 12$. Pour chaque pièce qui se trouve sans la main droite, le résultat augmente de 2 :

$$2 \cdot 5 + 4 \cdot 1 = 14$$

$$2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 16$$

$$2 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 18$$

Il faut donc se dire : 18 sont 6 de plus que 12. Dans 6, il y a 3 fois 2 (la différence entre les deux facteurs). Donc il y a trois pièces dans la main droite.

Alternativement, on peut aussi résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} D + G = 6 \\ a = 2 \\ b = 4 \\ aD + bG = 18 \end{cases}$$

pour trouver $D = 3$.

Après avoir capté l'attention des élèves à l'aide du mystérieux jeu de devinette, en fin de chapitre, les élèves peuvent faire le tour de magie et résoudre le système par binômes.

Le petit Gauß ***Classes : 2e***
Types : anecdote, Histoire ***Sujet : Suites***

On raconte que Gauß aurait trouvé la formule pour l'addition de nombres consécutifs à l'âge de sept ans quand son maître avait demandé combien font 1+2+3+...+100. Gauß a regroupé les nombres de la façon suivante et avait tout de suite le résultat[120].

$$1 + 100\,;\ 2 + 99\,;\ 3 + 97\,;\ \ldots\,;\ 50 + 51$$

Cela fait 50 groupes tous égaux à 101.

$$50 \cdot 101 = 5050$$

[120] Escofier p. 110 [résumé]

Jérôme Cardan *Classes : 1^e^*
Type : anecdote *Sujet : Complexes*

En 1570, Jérôme Cardan a été emprisonné pendant plusieurs mois pour hérésie après avoir réalisé l'horoscope de Jésus-Christ[121].

Ce numéro n'existe pas *Classes : 1e*
Type : blague *Sujet : Complexes*

Le numéro que vous avez composé est imaginaire. Tournez votre téléphone de 90° et réessayez[122].

Mary Everest Boole *Classes : 1e*
Type : anecdote *Sujet : Complexes*

Mathématicienne du XIXe siècle et femme du mathématicien George Boole, Mary Everest Boole s'est beaucoup intéressée à la pédagogie, à comment intéresser les enfants aux mathématiques. Elle a conseillé son mari pour ses publications et des étudiants à la bibliothèque du Queen's College à Londres.

Elle écrivit : « Les anges et les racines carrées des nombres négatifs [...] sont des messagers d'un monde encore inconnu et qui viennent nous informer de notre future destination et du chemin le plus court pour y accéder[123]. »

Exponentielle *Classes : 1e*
Type : blague *Sujets : Complexes*

Exponentielle et logarithme vont en boîte.

Logarithme s'éclate, il danse depuis des heures. Mais il voit son copain exponentielle qui a l'air triste, assis dans son coin.

Il va le voir et lui demande : « Tu ne viens pas faire la fête avec nous ? »

Exponentielle répond : « Non, elle n'est pas pour moi cette soirée, je n'arrive pas à m'intégrer. »

[121] Pickover p. 118 [paraphrasé]
[122] Stewart p. 188 [traduction personnelle]
[123] Pickover p. 322

Alors on danse ? ***Classes : 1e***
Type : blague ***Sujets : Complexes***

Que dit un homme complexe à une femme réelle pour la séduire ?

Réponse : Tu viens dans C ?

II. Les fonctions

Croissance exponentielle visualisée ***Classes : 6^e, 5^e, 1^e***
Types : curiosité, exercice ***Sujets : Fonctions Puissances***

La fonction exponentielle croît très rapidement. On le remarque vite si on la représente sur une feuille A4.

Disons que nous la représentons sur une feuille au format portrait et que nous ne sommes pas limités en hauteur. Sur l'axe des abscisses nous pouvons aller jusqu'à 18 car la feuille A4 n'est pas beaucoup plus large que 18 cm. Nous nous trouvons à Luxembourg Ville. À quel endroit se trouve alors l'ordonnée maximale que nous pouvons représenter sur notre axe des ordonnées infiniment long ? En d'autres mots combien font e^{18} ? Un petit calcul révèle : si on trace une ligne vers le Nord, l'ordonnée se trouve dans la mer du Nord, entre les Pays-Bas et la Norvège ; si on trace une ligne vers le Sud on arrive jusqu'à la Côte d'Azur.

Maintenant prenons une feuille au format paysage. Notre axe des abscisses sera un peu « plus long ». Cherchons l'image de 25. Dans ce cas, la courbe pourra passer par le pôle Nord, puis par le pôle Sud et elle passera à nouveau par notre feuille. Elle ne fera pas ce chemin une seule fois mais presque 18 fois et arrivera à Nancy, à 95 km de notre feuille[124].

On pourrait utiliser cette activité avec une autre base que e. Elle pourrait alors faire l'objet d'une narration de recherche sur les puissances. Elle s'intègre bien aussi dans un projet interdisciplinaire : à l'aide d'un programme de géolocalisation en ligne, les élèves peuvent trouver les coordonnées géographiques des ordonnées.

La conjecture de Riemann ***Classes : Toutes***
Type : Histoire ***Sujet : Fonctions***

Il s'agit de la conjecture que tous les zéros de la fonction de Riemann (qui est liée aux nombres premiers) se trouvent dans une certaine région. Cette conjecture reste jusqu'à ce jour sans preuve. Celui qui la trouvera peut espérer une belle récompense, puisque la conjecture de Riemann est l'un des 7 problèmes dotés de 1 million de dollars par le millionnaire Landon T. Clay. Depuis plus de 150 ans, les mathématiciens travaillent sur une piste de démonstration. Entretemps beaucoup d'autres théorèmes utilisent la conjecture dans leur démonstration, ce qui a comme conséquence que toutes ces démonstrations sont incomplètes. D'où l'importance d'une preuve de la conjecture[125].

[124] [inspiré de] *Mathematik Lehren* N° 181 p. 8
[125] Hesse p. 241 [résumé]

Un paraboloïde dans un verre — ***Classes : 4e, 3e, 2e, 1e***
Type : curiosité — ***Sujet : Fonctions***

Les télescopes utilisent des paraboloïdes créés par la rotation de Mercure afin de capturer la lumière présente dans l'espace. Cette méthode pour créer un miroir paraboloïde est 50 fois moins chère que pour un miroir fixe[126]. On peut créer le même effet en tournant un verre à moitié rempli dans sa main. Le liquide monte sur la paroi du verre puis descend au milieu. Cette forme s'appelle un paraboloïde[127].

Problème de notation — ***Classes : 3e, 2e, 1e***
Type : anecdote — ***Sujet : Trigonométrie***

Gauss trouvait la notation $sin^2\,\varphi$ « hideuse »[128]. D'après lui, cette notation aurait dû être l'équivalent de $sin(sin\,\varphi)$. Il préconisait l'option $(sin\,\varphi)^2$.

Continuité et dérivabilité — ***Classes : 2e, 1e***
Type : curiosité — ***Sujet : Dérivées***

La fonction de Weierstrass $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \Pi x)$ est continue partout, mais dérivable nulle part. De plus, comme indiqué sur le graphique ci-dessous, la fonction de Weierstrass « présente une complexité uniforme, indépendante du facteur d'échelle selon lequel on la considère. Ce qui est une caractéristique des fractales[129]. »

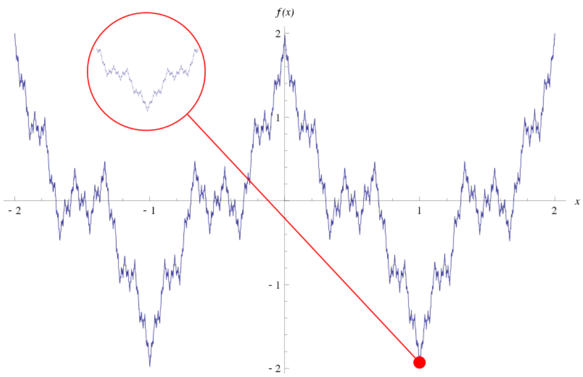


Image : https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_de_Weierstrass#/media/File:WeierstrassFunction.svg

[126] Schilling [résumé]
[127] [inspiré de] Beutelpacher p. 185
[128] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html quoting Eves [traduction personnelle]
[129] http://accromath.uqam.ca/2015/10/karl-weierstrass/

La trompette de Torricelli *Classes : 2e, 1e*
Type : paradoxe *Sujet : Intégrales*

Torricelli est surtout connu pour avoir inventé le baromètre à mercure. Mais il s'est aussi intéressé aux aires délimitées par les fonctions et aux volumes de solides de révolution, avant que Newton et Leibnitz n'aient développé le calcul intégral. La trompette de Torricelli est une découverte qui l'a fait douter de ses propres calculs.

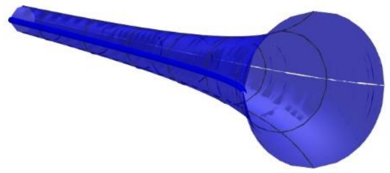


Image réalisée avec Geogebra

Il s'agit du fait qu'un solide de rotation ayant une surface infinie puisse avoir un volume fini.

Considérons l'aire en dessous de la courbe de la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Il est intéressant de remarquer que cette aire a une limite finie en l'infini.

$$A_2(b) = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1\right) = 1$$

On peut généraliser ce fait pour tout exposant entier $n \geq 2$.

$$A_n(b) = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^n}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^b = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{b^{n+1}\,(n-1)} + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{1}{n-1}$$

Le cas $n = 1$ présente un cas exceptionnel.

$$A_1(b) = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\, dx = \lim_{b \to +\infty} [ln(x)]_1^b = \lim_{b \to +\infty} (\ln(b) - \ln(1)) = +\infty$$

Mais si on fait tourner la courbe de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$, on obtient alors le volume suivant :

$$V_1(b) = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \Pi \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \Pi \cdot \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\, dx = \Pi \cdot A_2(b) = \Pi$$

Ce volume est donc fini !

Le solide de révolution que nous venons de construire est appelé « trompette de Torricelli » à cause de sa forme d'entonnoir qui ressemble à l'instrument de musique. Bizarrement, ce solide a un volume fini, mais il peut contenir une surface infinie. En d'autres mots, si on voulait peindre une planche infinie dont un côté a la forme de la courbe de $f(x) = \frac{1}{x}$, il suffirait de la pousser dans la trompette de Torricelli et de remplir la trompette d'une quantité finie de peinture. La planche sera alors peinte des deux côtés.

On peut essayer d'expliquer le paradoxe de la façon suivante.

Si on peint la planche d'une couche aussi fine que possible, l'épaisseur de cette couche sera à un moment donné quand même trop épaisse pour être contenue dans la trompette[130].

Utiliser les dérivées pour devenir Président — ***Classes : 2e, 1e***
Type : anecdote — ***Sujets : Dérivées***

En 1972, le Président Nixon a déclaré que le taux de l'augmentation de l'inflation avait diminué. C'est le taux d'un taux d'un taux. Il a utilisé la troisième dérivée pour promouvoir sa réélection[131].

Théorème des nombres premiers — ***Classes : 2e, 1e***
Types : Histoire, anecdote — ***Sujet : Logarithmes***

À l'âge de 15 ans (en 1793), Gauss a établi que le nombre de nombres premiers entre 0 et n est approximativement égal à $\frac{n}{\ln n}$. Il a noté cette conjecture dans son journal après l'avoir vérifiée à l'aide de longues tables de calculs faites à la main. Le théorème des nombres premiers a été démontré en 1896 indépendamment par Hadamard et La Vallée Poussin, donc 100 ans après sa formulation[132].

[130] *Mathematik Lehren* N° 181 p. 43 [résumé]
[131] Hesse p. 158 citant Hugo Rossi [traduction personnelle]
[132] Ziegler p. 61 [résumé]

La règle à calcul *Classes : 1^e^*

Types : Histoire *Sujet : Logarithmes*

La règle à calcul a été inventée par William Oughtred en 1621. Elle utilise les logarithmes pour transformer des multiplications en additions, facilitant ainsi le calcul de carrés, de cubes, d'inverses, de logarithmes et même de valeurs trigonométriques[133]. Cette invention a été aussi révolutionnaire et utile que l'invention de l'ordinateur au XX^e^ siècle. Elle a été utilisée pour la construction de gratte-ciels, de pont et d'avions. Les missions spatiales Apollo étaient équipées de règles à calcul en cas de problème d'ordinateurs[134].

Une école en Finlande a décoré un de ses murs d'une règle à calcul géante. Ces règles ont été vendues pour l'utilisation dans les salles de classe.

Image : http://koulukuulumiset.blogspot.com/2014/09/mika-on-laskutikku.html

Exemple de fonctionnement

Afin de multiplier 2 par 3, on utilise le fait que $\log(2\cdot 3)=\log(2)+\log(3)$. Sur les échelles logarithmiques de la règle à calcul, on décale la règle mobile pour que son 1 se trouve au-dessus du 2 de la règle fixe. On lit alors 6 en-dessous du trois de la règle mobile.

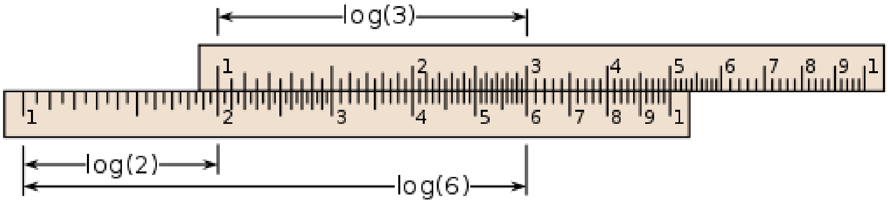


Image :
https://fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A8gle_%C3%A0_calcul#/media/File:Slide_rule_example2_with_labels.svg

[133] https://fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A8gle_%C3%A0_calcul [paraphrasé]
[134] Pickover p. 130 [résumé]

III. La géométrie

Un terrain couvert de gâteaux ***Classes : 7^{e}***
Type : exercice ***Sujet : Aires***

On veut faire un gâteau de la taille d'un terrain de football. Pour atteindre ce but, on va faire un gâteau de la taille d'une plaque de four chaque jour. De combien de jours a-t-on alors besoin ?

Prenons un terrain de dimensions 45 m sur 90 m. Et une plaque de four de dimensions 0,35 m sur 0,4 m. Il faut alors presque 30'000 gâteaux pour recouvrir le terrain de foot. En divisant par 365, il faudra environ 80 ans pour y arriver.

Le mètre ***Classes : 7^{e}, 6^{e}***
Type : Histoire ***Sujet : Géométrie***

Le mètre est un millionième du quart du méridien de la Terre. En 1790 (un an après la Révolution française), l'Assemblée nationale a décidé de définir une unité de longueur universelle. Il fallait d'abord mesurer la longueur du quart du méridien. À cet effet, des instruments sont inventés et une expédition est menée de 1792 à 1798 par Delambre et Méchain. Ils mesurent la distance entre Dunkerque et Barcelone par triangulation, puis calculent le quart du méridien par proportionnalité. Une fois trouvé, le mètre est placé à plusieurs endroits dans Paris afin que la population puisse se familiariser avec la nouvelle unité. On peut encore voir deux mètres étalons aujourd'hui. L'un se trouve sur la façade du ministère de la Justice, Place Vendôme (1^{er} arrondissement), l'autre au 36, rue de Vaugirard (6^{e} arrondissement), sous des arcades, non loin de l'entrée du Sénat (Jardin du Luxembourg). Ce dernier est le seul à avoir préservé son emplacement d'origine[135].

Si Pi était 3 ***Classes : 7^{e}, 6^{e}, 5^{e}***
Type : blague ***Sujet : Périmètres***

Dans la Bible, on trouve une approximation de Pi par 3. Si Pi était 3, alors tout cercle serait un hexagone. Ou encore, si pi était 3, al⬡rs[136].

Il s'agit-là d'une propriété à voir avec un clin d'œil évidemment. Hesse entend que le périmètre d'un hexagone est égal à trois fois son diamètre (distance entre deux sommets opposés). $P = 3 \cdot d$. Cette formule est comparable à celle du périmètre du cercle.

Cette comparaison ne vaut que pour le périmètre. L'aire de l'hexagone ne se calcule pas par $3r^2, mais$ $A = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot r^2$.

[135] https://www.maths-et-tiques.fr/index.php/histoire-des-maths/geometrie/histoire-du-metre [résumé]
[136] Hesse p. 147 [paraphrasé]

Pizza Pythagore

Types : curiosité, exercice

Classes : 7e, 6e, 5e
Sujets : Triangles Pythagore

À Strasbourg, j'ai souvent commandé une pizza au MD30, service de livraison proche du musée d'art moderne et contemporain. On a le choix entre trois tailles : 25, 30 et 40 cm de diamètre. Il est évidemment plus cher de commander une petite pizza et une pizza moyenne que de commander une grande. Mais dans quel cas obtient-on plus de pizza ? Afin de trouver une réponse, on pourrait calculer l'aire de chaque pizza et les comparer. Mais il y a une méthode plus ludique pour comparer ces deux commandes.

En coupant chaque pizza en deux morceaux égaux, on peut former – à l'aide des diamètres – un triangle avec une moitié de chaque pizza.

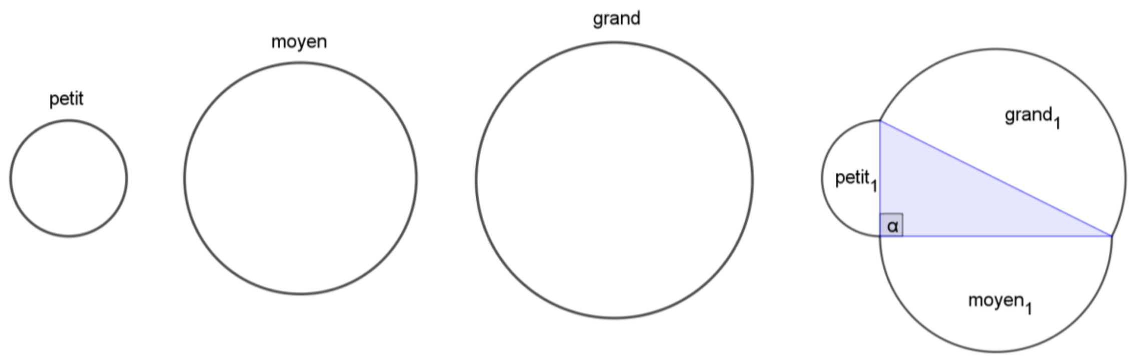


Image réalisée avec Geogebra

Si l'angle α est supérieur à 90°, il vaut mieux commander la grande pizza. On peut se convaincre de ceci en prenant comme diamètres $3\ cm, 4\ cm\ et\ 6\ cm$ par exemple.

Si l'angle α est inférieur à 90°, il vaut mieux commander les deux pizzas les plus petites.

Explication

Nommons a, b et c les diamètres respectifs (dans l'ordre croissant) des pizzas. D'après la réciproque du théorème de Pythagore nous savons que si on a $a^2 + b^2 = c^2$, alors le triangle est rectangle. En multipliant chaque membre de cette égalité par $\frac{\Pi}{4}$, on obtient $\Pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \Pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \Pi\left(\frac{c}{2}\right)^2$ c'est-à-dire, si la somme des aires des deux petites pizzas est égale à l'aire de la grande pizza, le triangle formé par les diamètres est rectangle. Réciproquement, si le triangle est rectangle, on obtient la même quantité de pizza avec chaque commande[137].

Qu'en est-il alors des pizzas du MD30 ? Dans notre cas, $a = 25\ cm, b = 30\ cm$ et $c = 40\ cm.$ En découpant les pizzas et en les arrangeant de façon à obtenir un triangle, ce triangle aura un angle

[137] [inspiré de] Hesse p. 33 citant John de Pillis 2002

obtus. En effet, $a^2 + b^2 = 1525\ cm^2$ et $c^2 = 1600\ cm^2$. Il vaut donc mieux commander une grande pizza. Cette question se prête bien à une narration de recherche.

Une corde autour de l'équateur

Types : paradoxe, exercice

Classes : ***7e, 6e, 5e, 4e***
Sujets : ***Périmètres***
Équations

Image : http://list25.com/25-extraordinary-math-principles-to-challenge-your-brain/

Imaginons que nous mettons une corde autour de l'équateur d'un globe. Maintenant nous allongeons la corde d'un mètre et nous la tenons à la hauteur de l'équateur autour du globe. La corde est alors un peu éloignée du globe. Faisons la même chose avec la Terre. La corde aurait initialement 40'000'000 m, puis 40'000'001 m. La corde sera alors un peu éloignée de la Terre. On peut se demander de combien la corde est éloignée de chaque sphère. Intuitivement on dirait que dans le cas du globe, l'éloignement sera plus important. Mais un calcul montre rapidement que cela n'est pas le cas.

Posons r_1 le rayon initial et r_2 le rayon final. La question se traduit comme suit : de combien de cm x le rayon r_2 est-il plus grand que r_1 ?

En comparant les deux périmètres on obtient :

$$2\Pi r_1 + 1 = 2\Pi r_2$$

$$\Leftrightarrow r_1 + \frac{1}{2\Pi} = r_2$$

Donc $x = \frac{1}{2\Pi}\ m \approx 16\ cm$. Cette valeur ne dépend pas de r_1. Donc pour chaque sphère, qu'elle ait la taille d'une balle de tennis ou d'une planète, l'éloignement de la corde reste le même[138].

[138] [inspiré de] *Mathematik Lehren* N° 181 p. 6

De plus, si on allonge la corde de 2 mètres, l'éloignement sera d'environ 32 cm. C'est à dire que l'éloignement est proportionnel à l'allongement. Chose assez contre-intuitive.

Une classe de 4e pourrait essayer d'établir l'équation ci-dessus.

Mort d'Archimède *Classes : 6e, 5e*
Type : anecdote *Sujet : Volumes*

« […] une légende raconte la mort tragique d'Archimède. Le savant traçant des figures sur le sol, est troublé par un soldat romain. "Tu déranges mes cercles", dit-il. Celui-ci, vexé, tue Archimède d'un coup d'épée[139]. »

Archimède aurait demandé à ses proches de poser sur sa pierre tombale un cylindre contenant une sphère et d'indiquer la proportion entre les deux volumes[140].

Abraham Lincoln *Classes : À partir de la 6e*
Type : anecdote *Sujet : Démonstrations*

Le 16e président des États-Unis, Abraham Lincoln (1809-1865) a écrit qu'il trouvait important d'étudier les mathématiques durant ses études de droit. Il se disait que pour devenir un bon avocat, il devait être capable de faire des démonstrations. Afin de mieux comprendre ce que signifiait « démontrer », il choisit de lire les six livres d'Euclide. Une fois comprises les 173 démonstrations de propositions y incluses, il a continué ses études de droit[141].

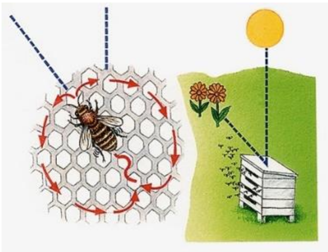
Capacité visuo-spatiale *Classes : Toutes*
Types : anecdote *Sujet : Dimensions*

Le mathématicien Laurent Schwartz (1915-2002) avait un handicap : il avait une très mauvaise représentation de l'espace. Il avait besoin de sa femme pour se diriger en ville. Cela ne l'a pas empêché de travailler dans des espaces de dimension infinie[142].

[139] https://www.maths-et-tiques.fr/index.php/histoire-des-maths/mathematiciens-celebres/archimede
[140] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html citant Plutarque [résumé]
[141] Hesse p. 160 [résumé]
[142] Escofier p. 165 [paraphrasé]

Mathématiques et calcul *Classes : Toutes*
Types : anecdote, blague *Sujets : Opérations*

Les abeilles utilisent une danse pour montrer à leurs collègues un endroit où elles peuvent trouver du nectar. Le chemin qu'elles tracent forme un angle avec la verticale de leur ruche et montre la direction dans laquelle elles doivent voler par rapport au soleil pour trouver la nourriture. La distance dépend de la durée de la danse[143].



http://www.larousse.fr/encyclopedie/images/Danse_des_abeilles/1003416

Pi est-il égal à 4 ? *Classes : Toutes*
Type : paradoxe *Sujet : Périmètres*

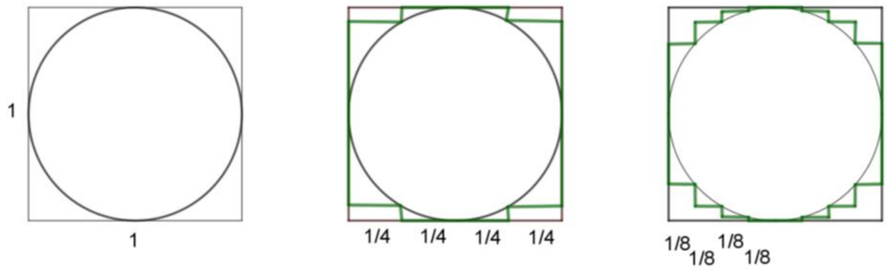


Image réalisée avec Geogebra

Le périmètre du carré est 4. En utilisant l'approximation du cercle par des escaliers, on remarque que l'escalier garde toujours la longueur du carré, donc 4. Mais nous savons que le périmètre du cercle de diamètre 1 est Π. L'erreur consiste en l'hypothèse qu'une approximation géométrique ferait converger des longueurs[144].

[143] Ziegler p. 19 [résumé]
[144] *Mathematik Lehren* N° 181 [résumé]

Euclide sur les preuves *Classes : Toutes*
Type : anecdote *Sujet : Démonstrations*

« Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve[145]. »

Euler malvoyant *Classes : Toutes*
Type : anecdote *Sujet : Géométrie*

Euler (1715-1783) a eu 13 enfants dont 5 seulement ont survécu. Il ne voyait que d'un un œil et dictait ses travaux à ses enfants. Il avait donc besoin d'une très bonne mémoire[146].

Quand il a complètement perdu la vue, il aurait dit : « Maintenant j'ai moins de distractions[147]. »

POTUS mathematicus *Classes : 5e*
Types : anecdote, exercice *Sujet : Pythagore*

Le 20e président des États-Unis, James Garfield (1831-1881), a publié une démonstration du théorème de Pythagore avant de devenir président. Elle consiste à disposer deux triangles rectangles identiques de façon que deux cathètes différentes se trouvent sur une même droite et que les triangles se touchent en un sommet. En joignant d'un segment les sommets n'appartenant pas à la droite, on obtient un troisième triangle. La figure complète forme un trapèze[148].

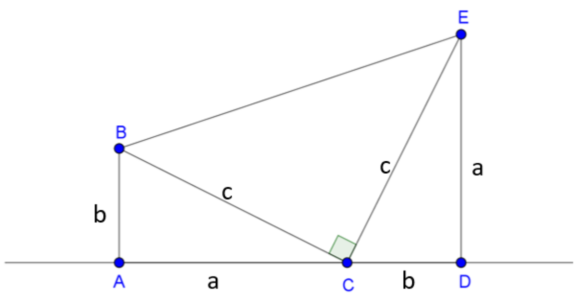


Image réalisée avec Geogebra

[145] https://www.maths-et-tiques.fr/index.php/detentes/blagues citant Euclide
[146] https://www.maths-et-tiques.fr/index.php/histoire-des-maths/mathematiciens-celebres/euler [résumé]
[147] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html citant Eves
[148] Hesse p. 159 [traduction personnelle]

Garfield a calculé de deux façons l'aire de la figure :

1. En calculant l'aire du trapèze.
2. En calculant la somme des aires des trois triangles.

L'égalité ainsi obtenue se simplifie pour donner l'égalité de Pythagore.

$$A_{trapèze} = A_{ABC} + A_{CDE} + A_{BCE}$$

$$\frac{a+b}{2}(a+b) = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}$$

$$(a+b)^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Les élèves peuvent se mettre à la place de Garfield et trouver la formule.

L'âge du théorème de Pythagore ***Classes : 5e***
Types : anecdote, Histoire ***Sujet : Pythagore***

Les triplets pythagoriciens étaient déjà connus par les Babyloniens vers 1800 av. J.-C. La tablette Plimpton 322 achetée par Georges Plimpton en 1922 pour 10 $ à un trafiquant d'antiquités le prouve[149].

La deuxième colonne représente la longueur B d'une hypoténuse, la troisième colonne la longueur C d'une cathète. La première colonne est égale à $\frac{C^2}{(C^2 - B^2)}$.

Image : https://scientificgems.wordpress.com/2013/11/20/plimpton-322-mathematics-3800-years-ago/

[149] Pickover p. 32 [résumé]

Quel était le nombre des disciples de Pythagore ?

Types : anecdote, source

Classes : 5^e, 4^e
Sujets : Pythagore
Calcul littéral

Interrogé par Polycrate sur le nombre de ses disciples, Pythagore est supposé avoir répondu :

« Je vais te le dire, Polycrate : la moitié étudie les belles sciences mathématiques ; l'éternelle nature est l'objet des travaux d'un quart ; un septième s'exerce au silence et à la méditation ; il y a de plus trois femmes dont Théano est la plus distinguée. Voilà le nombre de mes disciples qui sont aussi ceux des Muses[150]. »

La réponse se traduit en l'équation $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{7}x+3=x$. En la résolvant, on trouve 28 disciples.

Pythagore et le solfège

Types : anecdote, Histoire

Classes : 5^e, 4^e
Sujets : Pythagore
Musique

Pythagore a découvert les intervalles en musique. Fasciné par les rapports de nombres entiers, il a découvert qu'en prenant la moitié d'une corde, on obtient une octave. D'autres rapports sont 2:3, 3:4, 4:5, 5:6 qui correspondent respectivement à une quinte, une quarte, une tierce majeure, une tierce mineure[151].

Les élèves jouant d'un instrument à cordes pourront le vérifier.

S'il veut, il peut
Type : anecdote

Classes : 4^e
Sujet : Thalès

Thalès, qui menait une vie simple, était souvent sujet de moqueries. Comme il observait beaucoup le ciel, il prévoyait une bonne récolte d'olives. En avance, il a loué à petit prix un grand nombre de pressoirs à huile et au moment de la récolte, il les a sous-loués aux moqueurs. Il leur a ainsi montré qui si un philosophe veut devenir riche, il le peut à tout moment[151].

De nombreux élèves pourront se retrouver dans cette anecdote : ils peuvent, s'ils le veulent.

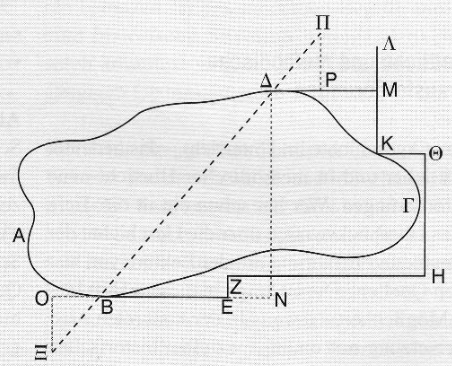
[150] *Mathematik Lehren* N° 151 p. 8 [traduction personnelle]
[151] *Mathematik Lehren* N° 151 p. 8 [traduction personnelle]

Le Tunnel de Samos ***Classes : 4e***
Types : Histoire, source ***Sujet : Thalès***

Il existe une attraction touristique sur l'île grecque de Samos : le tunnel construit par l'ingénieur Eupalinos. Hérodote fut le premier à mentionner ce tunnel de plus de 1 km de long, construit au 5e siècle avant Jésus Christ. Aucun tunnel n'était aussi long à l'époque. D'après les archéologues, sa construction aurait duré entre 8 et 15 ans. Le tunnel servait à l'approvisionnement en eau de la forteresse de Samos. Le plus fascinant est que le tunnel de Samos a été construit en commençant simultanément de chaque côté et que les deux équipes de constructeurs se sont rencontrées au milieu. Les deux équipes ont respecté la direction et le dénivellement calculés à l'avance par Eupalinos. Mais comment a-t-il procédé ? Une explication possible est donnée par Héron d'Alexandrie au 1er siècle après Jésus Christ[152].

Au premier siècle apr. J.-C., Héron d'Alexandrie décrit comment creuser une montagne quand le point d'entrée et de sortie sont données. Le texte original grec n'a pas été traduit en français, mais Hermann Schöne l'a traduit en allemand dans son livre *Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia* en 1903. À partir de la page 238, on lit :

XV. Einen Berg in gerader Linie zu durchstechen, wenn die Mündungspunkte des Grabens an dem Berge gegeben sind.



Man denke sich als Basis des Berges die Linie ΑΒΓΔ, und als die Punkte, durch welche man den Graben führen muss, B und Δ. Ich ziehe von B aus auf dem Erdboden die beliebige Gerade BE und von dem beliebigen Punkte E ziehe ich vermittelst der Dioptra zu BE im rechten Winkel EZ, und weiter ziehe ich von dem beliebigen Punkte Z vermittelst der Dioptra im rechten Winkel (zu EZ) die Linie ZH, und wiederum von dem beliebigen Punkte H zu ZH im rechten Winkel HΘ, und weiter von dem beliebigen Punkte Θ zu ΘH im rechten Winkel ΘK, und zu ΘK im rechten Winkel KΛ. Nun führe ich die Dioptra auf der Linie KΛ, indem ich das Visierlineal immer auf einen der Punkte der Geraden KΛ gerichtet halte, so lange hin, bis durch Einstellung des Lineals im rechten Winkel der Punkt Δ sichtbar wird. Er sei sichtbar geworden, sobald die Dioptra bei M steht. Es wird daher MΔ eine Senkrechte auf KΛ sein. Nun denke man sich EB bis N und auf sie die Senkrechte ΔN gefällt. Es ist daher möglich aus EZ, HΘ und KΛ die Größe von ΔN zu bestimmen, wie wir thaten, als wir von jedem beliebigen Punkt auf einen anderen, nicht sichtbaren Punkt die Verbindungslinie zogen. Gleichermaßen kann man auch BN aus BE, ZH, ΘK und ΛΔ berechnen. Es sei nun beispielsweise $BN = 5\Delta N$ gefunden und man denke sich die Verbindungslinie BΔ bis Ξ verlängert und es werde auf BE die Senkrechte ΞO gefällt. Gleichermaßen denke man sich BΔ bis Π verlängert und die Senkrechte auf ΔΛ, nämlich ΠP, gefällt.
Es wird daher ebenso $BO = 5O\Xi$ und $\Delta P = 5P\Pi$ sein. Wir nehmen nun auf BE den beliebigen Punkt O an und ziehen OΞ im rechten Winkel zu BO, sodann machen wir $O\,\Xi = \frac{1}{5}BO$, dann wird BΞ nach B zu geneigt sein. Wenn wir nun in gleicher Weise $\Pi P = \frac{1}{5}\Delta P$ machen, werden wir in gleicher Weise ΔΠ nach Δ geneigt haben. Wir werden nun den Durchstich so machen, dass wir von B aus den Graben auf der (Verlängerung der) Geraden BΞ, von Δ aus auf der (Verlängerung der) Geraden ΔΠ führen. Weiter wird der Graben hergestellt, indem eine Richtlatte auf die gefundenen Geraden ΞB oder auf ΠΔ oder auch nach beiden Seiten hin aufgestellt wird. Wird der Graben auf diese Weise hergestellt, so werden sich die Arbeiter treffen.

Image: *Mathematik Lehren* n° 151, *Geschichte der Mathematik* p.6.

[152] *Mathematik Lehren* N° 151 p. 6 [résumé]

Voici un schéma simplifié de la méthode décrite par Héron :

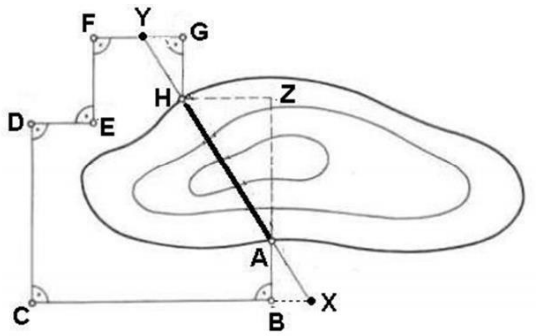


Image : http://www.lehrer.uni-karlsruhe.de/~za665/OSA/201011/2010-11-16_henn_tunnel-von-samos.pdf

On mesurait les distances autour de la montagne en gardant toujours un angle de 90° entre les segments mesurés. Puis on a calculé HZ=CB-DE-FG et AZ=CD+EF-GH-AB. On connaissait alors les longueurs de deux côtés du triangle rectangle AHZ. Ensuite ion a placé les points X et Y de façon que les rapports $\frac{AB}{BX}$, $\frac{GH}{HY}$ et $\frac{AZ}{HZ}$ soient égaux. Les segments [YH] et [AX] sont alors des prolongements du segment [AH] car les triangles YGH, HZA et ABX sont semblables. Il fallait donc ciseler le tunnel dans la direction donnée par [YH] au nord et [AX] au sud[153].

Le tunnel de Samos peut être introduit en cours de mathématiques sous différentes formes et à des fins différentes.

Il se prête bien à une petite information historique. Le fait que la construction ait été possible en commençant des deux côtés il y a 2 500 ans est impressionnante. Les élèves pourront d'abord réfléchir aux méthodes utilisées aujourd'hui pour garantir que les ouvriers se rencontrent au milieu d'un tunnel. En prenant conscience de la technologie nécessaire, on remarque vite que le problème de la rencontre des ouvriers dans un tunnel est un sujet passionnant.

Pour introduire la notion de triangles semblables, les élèves pourront trouver par eux-mêmes l'étape cruciale pour trouver la direction de forage. Ils auront d'abord besoin que l'enseignant leur explique les premières étapes à l'aide du schéma. La construction des points P et O sera alors laissée au soin des élèves.

On pourrait aussi envisager de traiter ce problème à la fin d'un chapitre sur les triangles semblables afin de montrer leur utilité. Il faudrait alors prendre plus de temps et analyser le texte source. Les élèves devraient connaître le dioptre utilisé dans la description et construire leur propre schéma à partir de la description de Héron d'Alexandrie. Un schéma commun serait alors expliqué en plénière.

D'autres idées de discussions pourraient être les inconvénients de cette méthode et le langage mathématique utilisé dans le texte source.

[153] [inspiré de] *Mathematik Lehren* N° 151 p. 6

Thalès maladroit *Classes : 4e*
Type : anecdote *Sujet : Thalès*

« Comment peux-tu prétendre savoir ce qui se passe dans le ciel quand tu ne vois pas ce qui est devant tes pieds. » aurait dit une femme âgée à Thalès quand il est tombé dans un puits[154].

Le théorème de Marion *Classes : 6e, 5e, 4e, 3e*
Type : curiosité *Sujet : Géométrie*

Voilà un des rares théorèmes nommés d'après une femme, qu'il est intéressant de montrer dans presque toutes les classes.

L'aire de la partie hexagonale qui apparaît dans un triangle quand on coupe ses côtés en trois segments égaux et qu'on relie les extrémités des segments au sommet opposé du triangle, est un dixième de l'aire du triangle[155].

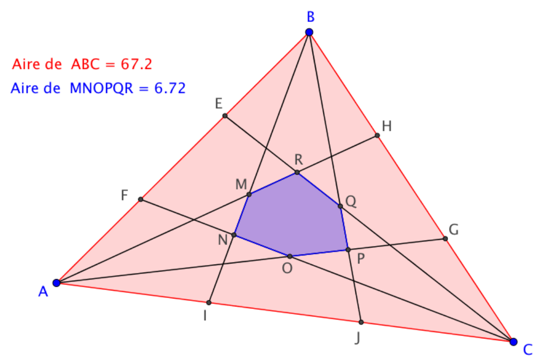


Image : http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/detentes/le-theoreme-de-marion

Sous le lien ci-dessus on trouve aussi une figure Geogebra dynamique.

Grassmann *Classes : 4e, 3e*
Type : Histoire *Sujet : Vecteurs*

Hermann Günther Grassmann (1809-1877) a initialement développé la notion de vecteur pour les besoins de la théorie des marées. Grassmann est aussi connu pour avoir étudié le sanskrit[156].

[154] https://www.maths-et-tiques.fr/index.php/histoire-des-maths/mathematiciens-celebres/thales [résumé]
[155] https://www.maths-et-tiques.fr/index.php/detentes/le-theoreme-de-marion [paraphrasé]
[156] Ouersighni p. 137 [résumé]

Chasles *Classes : 4e, 3e*
Type : anecdote *Sujet : Vecteurs*

Michel Chasles (1793-1880) a plusieurs fois été victime d'escrocs. Il a ainsi acheté des lettres contrefaites pour 3000 francs, une somme très élevée pour l'époque. Parmi ces lettres, il y en avait une de Galilée à Pascal où Galilée se plaignait de sa mauvaise vue alors qu'il était déjà aveugle depuis quatre ans à la date indiquée sur la lettre !

Chasles est également connu pour avoir aussi acheté des terrains là où se trouve aujourd'hui la tour Eiffel. Un escroc lui avait vendu ces terrains publics[157].

Cependant, pour ses apports en mathématiques, le nom de Chasles est inscrit sur la tour Eiffel.

Image : http://photos.linternaute.com/p-de-grands-noms-sur-la-tour-eiffel-1555972

Flatland *Classes : 2e, 1e*
Types : curiosité, anecdote *Sujet : Dimensions Géométrie*

Flatland est un livre écrit en 1884 par Edwin A. Abbott. Les héros du livre vivent dans un monde à deux dimensions. Ils ne parviennent pas à imaginer une troisième dimension. Ils ne peuvent pas sauter par exemple ; or pour le lecteur, il serait facile de sortir un personnage du Flatland et de le replacer à un autre endroit dans son monde. Dans Flatland, une personne de la troisième dimension pourrait voler l'or d'un trésor dans la deuxième dimension. Le directeur de banque du Flatland ne comprendrait pas comment cela est possible.

157 Ouersighni p. 143 [résumé]

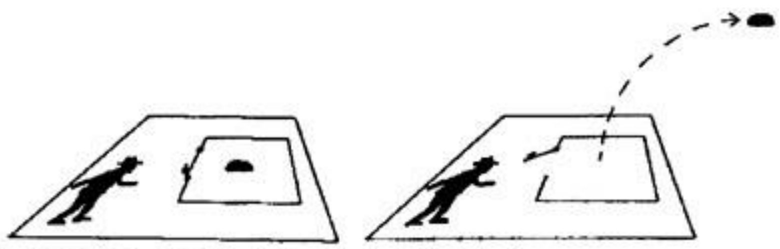


Fig. 10. Mr. Plain-dweller's "flat gold" is stolen from the locked safe.

Image : http://www.anthromed.org/Article.aspx?artpk=83

De la même façon, on peut essayer de comprendre l'existence théorique d'une quatrième dimension. Une personne de la quatrième dimension pourrait nous observer à travers les murs de la troisième dimension. Il pourrait enlever un objet d'une maison fermée et le placer dans une autre maison fermée.

L'hypercube ***Classes : 2^e^, 1^e^***

Type : curiosité ***Sujet : Dimensions Géométrie***

Il est difficile d'imaginer une dimension au-delà de la 3^e. Mais on peut se demander à quoi ressemblerait un cube dans d'autres dimensions. En 2D, si on veut, un cube s'appelle un carré. Il existe aussi un cube en 4 dimensions. Et on peut essayer de se l'imaginer. Pour cela partons des propriétés du carré et du cube :

Carré : 4 sommets de degré 2, il est composé d'arêtes

Cube : 8 sommets de degré 3, il est composé de carrés

Cube en 4D : 16 sommets de degré 4, il est composé de cubes 3D.

Il reste à trouver le nombre de cubes 3D dans le cube 4D. Pour cela commençons par le cube 3D.

Un sommet a 3 arêtes, il faut 2 arrêtes pour y fixer un carré. Il y a 3 façons de choisir 2 arrêtes parmi 3. À chacun des 8 sommets du cube on peut donc fixer 3 carrés. Donc notre cube aurait $8 \cdot 3 = 24$ faces carrées. Mais comme un carré a 4 sommets, on a compté 4 fois trop de faces. Finalement on conclut que le cube 3D a 6 faces carrées.

Utilisons le même raisonnement pour le cube 4D.

Un sommet a 4 arêtes, il faut 3 arrêtes pour y fixer un cube 3D. Il y a 4 façons de choisir 3 arrêtes parmi 4. À un sommet on peut donc fixer 4 cubes 3D. Donc notre cube 4D contiendrait $16 \cdot 4 = 64$ cubes

3D. Mais comme un cube 3D a 8 sommets, on a compté 8 fois trop de cubes 3D. Finalement, on conclut que le cube 4D est composé de 8 cubes 3D[158].

Salvador Dalí a représenté le patron du cube 4D dans le tableau intitulé « corpus hypercubus ».

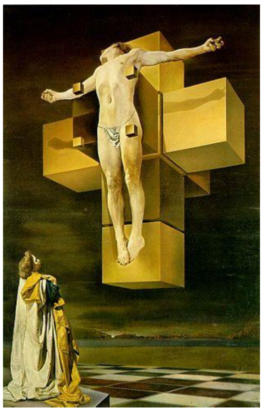


Image : https://en.wikipedia.org/wiki/Crucifixion_(Corpus_Hypercubus)#/media/File:Dali_Crucifixion_hypercube.jpg

[158] Beutelspacher p. 161 [traduction personnelle]

IV. Proba-Stat

Le code César *Classes : À partir de la 6e*
Types : anecdote *Sujet : Statistique*

Il nous est transmis que César utilisait un code pour chiffrer ses messages. Il aurait décalé de 3 lettres dans l'alphabet toutes les lettres du texte. Aujourd'hui on appelle code César tout décalage de lettres dans l'alphabet.

Afin de déchiffrer un texte, on peut utiliser la force des statistiques. Il y a des lettres qui sont plus utilisées que d'autres. En français par exemple, le e est la lettre la plus fréquente dans un texte quelconque. Presque deux fois plus fréquente que la lettre a qui arrive en deuxième place[159].

La lettre la plus fréquente dans un texte chiffré est donc probablement un e. Une fois qu'on sait cela, on connaît le décalage dans l'alphabet utilisé et on peut déchiffrer tout le texte.

Le code César est utilisé dans le codage de la voix quand on téléphone. La clé pour déchiffrer la voix dans le portable se trouve dans la carte SIM[160].

La cryptographie est un champ important des mathématiques du XXIe siècle. La sécurisation de données numériques offre de nombreux postes de travail. Le code César permet une initiation ludique à la cryptographie.

Tricher aux dés *Classes : À partir de la 5e*
Type : anecdote *Sujet : Probabilité*

Une étude menée en 2014 à la faculté économique de l'université de Munich a examiné la tendance à tricher des Berlinois de l'Ouest et des Berlinois de l'Est. Pour cela, les participants ont lancé 40 fois un dé. Avant chaque lancer, ils ont dû décider s'ils compteraient le nombre de points tournés vers le haut, ou le nombre de points tournés vers le bas. Ils n'avaient pas besoin de dire à voix haute laquelle des deux options ils avaient prise. Cette situation constitue donc une belle opportunité pour tricher.

Avec 259 participants qui lancent chacun 40 fois un dé, on s'attend à un résultat moyen d'environ 3,5. Mais cela n'a pas été le cas. Les Berlinois de l'Ouest ont lancé une moyenne de 3,68 et les Berlinois de l'Est ont obtenu 3,83 en moyenne. Une différence considérable.

Les économistes s'expliquent ce résultat par une socialisation dans un environnement socialiste. Le système économique en Allemagne de l'Est leur aurait inculqué que l'honnêteté ne mène pas au succès[161].

---

[159] https://fr.wikipedia.org/wiki/Fr%C3%A9quence_d%27apparition_des_lettres_en_fran%C3%A7ais
[160] Beutelspacher CD1 Ch.1 [résumé]
[161] *Mathematik Lehren* N° 194 p. 19-20 [résumé]

Le problème des 3 portes — ***Classes : À partir de la 5e***
Types : paradoxe, anecdote — ***Sujet : Probabilité***

Le problème des trois portes est basé sur un jeu télévisé qui demande d'abord au candidat de choisir une porte parmi trois. Derrière l'une des portes se cache un objet que le candidat peut gagner. Derrière les deux autres se cache une chèvre. Une fois que le candidat a fait son choix, l'animateur ouvre l'une des deux autres portes derrière laquelle se cache une chèvre. Le candidat ne sait alors toujours pas s'il a choisi la bonne porte ou non. La deuxième chèvre pourrait se cacher derrière sa porte ou derrière la troisième porte encore fermée. L'animateur demande alors au candidat s'il veut garder sa porte ou s'il change d'avis. Intuitivement, on dirait que la probabilité de gagner ne change pas avec la décision du candidat. Mais cela est faux. S'il garde sa porte de départ, sa chance de gagner est de $\frac{1}{3}$. S'il change d'avis, sa chance de gagner augmente et est de $\frac{2}{3}$.

Explication

Un tableau montre rapidement que les chances du candidat peuvent augmenter après la question de l'animateur. Disons que le candidat choisit la première porte. Il y a trois possibilités pour la bonne porte. Nous allons analyser les trois cas ; ils correspondent aux trois lignes du tableau. ~~Chèvre~~ indique quelle porte l'animateur ouvre avant de poser sa question.

Porte 1	Porte 2	Porte 3	S'il garde la porte 1	S'il change d'avis
Chèvre	~~Chèvre~~	**Prix**	Perd	**Gagne**
Chèvre	**Prix**	~~Chèvre~~	Perd	**Gagne**
Prix	~~Chèvre~~	Chèvre	**Gagne**	Perd

Pendant longtemps les mathématiciens n'étaient pas tous d'accord sur ce problème. Il est devenu encore plus célèbre grâce au film « 21 » dans lequel le professeur (Kevin Spacey) pose la question. Ben (Jim Sturgess) connaît la réponse, ce qui le qualifie pour devenir membre dans le groupe secret qui planifie de gagner frauduleusement au casino.

Lancer un 6 et lancer deux 6 — ***Classes : À partir de la 5e***
Types : anecdote, exercice — ***Sujet : Probabilité***

Dans une lettre à Pierre de Fermat (1607-1665), Pascal s'est montré irrité par le Chevalier de Méré qui lui écrivait régulièrement à propos de problèmes mathématiques. Les chevaliers n'étaient pas mathématiciens, ce qui d'après Pascal était « un grand défaut ». Dans sa lettre, Pascal explique à Fermat deux résultats de probabilités que de Méré trouvait troublants.

La première question était la suivante : combien de fois x doit-on lancer un dé à 6 faces pour que la probabilité d'avoir un 6 soit supérieure à 0,5 ? (A)

La deuxième question est : combien de fois x doit-on jeter deux dés pour que la probabilité de lancer deux 6 simultanément soit supérieure à 0,5 ? (B)

Les réponses sont :

$$(A): \qquad 0{,}5 < 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^x \Leftrightarrow 0{,}5 > \left(\frac{5}{6}\right)^x \Leftrightarrow x > 3{,}80178$$

C'est à dire qu'en lançant 4 fois le dé, on a plus de chance d'obtenir un 6 que de ne pas obtenir de 6.

$$(B): \qquad 0{,}5 < 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^x \Leftrightarrow 0{,}5 > \left(\frac{35}{36}\right)^x \Leftrightarrow x > 24{,}6051$$

Il faut donc lancer au moins 25 fois les deux dés pour avoir plus de chances d'obtenir deux 6 simultanément que de ne pas obtenir deux 6 simultanément[162].

Ce qui troublait de Méré c'est que si on lance 4 fois un dé de 6 faces (6 cas possibles), le jeu (A) est favorable. Mais si on lance 24 fois deux dés à 6 faces (36 cas possibles), le jeu (B) est défavorable. Il aurait aimé y trouver une proportionnalité.

Selon leur niveau, les élèves peuvent calculer les résultats ci-dessus. Mais l'histoire de de Méré peut très bien être racontée à des élèves trop jeunes pour faire les calculs.

10! secondes jusqu'aux vacances ***Classes : Toutes***
Type : curiosité ***Sujet : Combinatoire***

Les élèves (ou enseignants) qui, le premier jour de classe, se demandent quand auront lieu les prochaines vacances, vont aimer le calcul suivant. En général, il y a 6 semaines d'intervalle entre chaque période de vacances scolaires au Luxembourg. En secondes, cela donne :

$6\cdot7\cdot24\cdot60\cdot60=10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=10!$ [163]

« Les vacances commencent dans 10! secondes. », voilà bien une réponse de professeur de mathématiques !

[162] [inspiré de] *Mathematik Lehren* N° 151 p. 58-61
[163] [inspiré de] Hesse p. 26

Jeu interrompu *Classes : À partir de la 4^e^*
Types : anecdote, exercice *Sujet : Probabilité*

Le calcul de probabilités a commencé aux XVe et XVIe siècles. Il s'agissait toujours de problèmes de gain et de perte dans un jeu. Pascal et Fermat ont évoqué dans leur correspondance un problème qu'on pourrait appliquer à un match de tennis aujourd'hui. C'est le problème des parties. Un jeu qui se gagne en gagnant 3 parties est annulé prématurément au score 2:0. À quelle part de la mise les joueurs ont-ils droit?

Dans une lettre de Pascal à Fermat on lit que Fermat a trouvé une solution à ce problème. Malheureusement la lettre de Fermat expliquant sa méthode est perdue. Pascal écrit à Fermat qu'il a une autre méthode menant au même résultat. Elle est assez intuitive.

Pascal suppose que la mise est 32 pistoles (1 pistole = double escudo = pièce d'or espagnole) par joueur. Le premier à gagner 3 parties reçoit donc 64 pistoles, l'autre joueur perd sa mise. Pascal part de la situation où le score est 2:1. Dans un deuxième temps, il revient au problème initial d'un score de 2:0.

Première argumentation : le score est de 2:1. Après la prochaine partie, soit le joueur A gagne le jeu, soit le score sera de 2:2. Dans le premier cas, A gagne 64 pistoles. Dans le deuxième cas chacun pourrait reprendre sa mise de 32 pistoles. En tout cas, 32 pistoles sont certains pour A. Il pourra dire à B: « donne-moi les 32 pistoles qui me sont assurées et partageons les 32 autres. A gagne donc 48 pistoles, B gagne 16 pistoles.

Deuxième argumentation : le score est de 2:0. Après la prochaine partie, soit le joueur A gagne le jeu, soit le score sera de 2:1. C'est-à-dire, soit A gagne 64 pistoles, soit on est ramené au 1er cas examiné par Pascal. A dit donc à B: « donne-moi les 48 pistoles qui me sont assurées et partageons les 16 autres. » A gagne donc 56 pistoles, B gagne 8 pistoles.

Par cette méthode, on peut aussi examiner le cas d'une annulation au score de 1:0. A gagne alors 44 pistoles[164].

Attention aux permutations *Classes : 2e, 1e*
Type : anecdote *Sujet : Combinatoire*

Les élèves qui connaissent le jeu de société *Catan* savent qu'on lance le plus souvent 7 aux deux dés. C'est la valeur qui active le brigand, représenté par un pion noir, celui qui vole des cartes aux joueurs.

Le jeu de Zara, populaire en Italie au Moyen Âge, consiste à lancer 3 dés et à deviner la somme des points. Au XVIIe siècle, quelques nobles ont écrit à Galilée pour qu'il les éclaircisse sur leur constatation que 10 et 11 arrivent le plus souvent. En énumérant toutes les possibilités, ils ont compté 6 combinaisons de points pour former 9, de même pour former 10, 11 et 12. Ils pensaient donc que ces quatre issues étaient équiprobables. Les hommes avaient oublié les permutations[165].

[164] *Mathematik Lehren* N° 91 p. 61 [traduction personnelle]
[165] Hesse p. 71 [résumé]

En effet, sans considérer les permutations, il y a 6 possibilités pour obtenir un 9, un 10, un 11 ou un 12. En considérant les permutations, il y a 25 possibilités pour obtenir un 9 ou un 12, mais 27 possibilités donnant 10 ou 11 aux trois dés.

De l'avantage de croire en Dieu — ***Classes : 2^e^, 1^e^***

Type : anecdote — ***Sujet : Probabilité***

Ne vaudrait-il pas mieux croire en Dieu ? Voilà une question à laquelle Blaise Pascal répond par un clair « oui ». Il en donne même une raison. Supposons que la probabilité que Dieu existe soit de $\frac{1}{10}$. (On pourrait choisir n'importe quelle autre fraction comprise entre 0 et 1)

1er cas : on fait le choix d'être chrétien.

Si Dieu n'existe pas, alors il n'y a pas de vie après la mort (= 0) avec une probabilité de $\frac{9}{10}$.

$$\frac{9}{10} \cdot 0 = 0$$

Si Dieu existe, on vivra alors éternellement dans le paradis (∞) avec une probabilité de $\frac{1}{10}$.

$$\frac{1}{10} \cdot \infty = \infty$$

Estimation totale : ∞

2^{e} cas : on fait le choix d'être athée.

Si Dieu n'existe pas, alors il n'y a pas de vie après la mort (= 0) avec une probabilité de $\frac{9}{10}$.

$$\frac{9}{10} \cdot 0 = 0$$

Si Dieu existe, on vivra alors éternellement dans l'enfer ($-\infty$) avec une probabilité de $\frac{1}{10}$.

$$\frac{1}{10} \cdot (-\infty) = -\infty$$

Estimation totale : $-\infty$ [166].

[166] [inspiré de] https://www.maths-et-tiques.fr/index.php/histoire-des-maths/nombres/la-pari-de-pascal

V. Le calcul littéral

5 = 3 ? *Classes : 7e, 6e, 5e*
Type : paradoxe *Sujets : Équations*
Factorisation

Voici une erreur très utile. L'exemple montre qu'il est impossible de diviser chaque membre d'une équation par 0[167].

$$125 - 75 - 50 = 75 - 45 - 30$$

$$\Leftrightarrow 5(25 - 15 - 10) = 3(25 - 15 - 10)$$

$$\Leftrightarrow 5 = 3$$

Pourquoi x *Classes : À partir de la 5e*
Type : Histoire *Sujets : Équations*
Histoire

Terry Moore termine son discours en 2012 sur le plateau de TED Talks par la phrase :

« x est l'inconnue parce que les Espagnols ne savent pas prononcer le son "sch" [ʃ]. »

Le calcul littéral venant du nord de l'Afrique était d'abord noté en arabe. On écrivait des textes mathématiques au lieu d'équations utilisant des symboles. L'inconnue était représentée par le mot شيء qui veut dire « quelque chose » et se prononce [ʃ eɪ ɒn].

En arrivant en Europe, en passant par l'Espagne, les textes arabes ont dû être traduits en espagnol. Mais le son "sch" [ʃ] n'existe pas en espagnol. On a alors choisi la lettre grecque χ (Khi) pour désigner l'inconnue. Pour l'utilisation dans toute l'Europe on a opté plus tard pour la lettre latine x[168].

Blaise Pascal *Classes : À partir de la 5e*
Type : anecdote *Sujet : Histoire*

Pascal combattait ses maux de tête pendant qu'il faisant des mathématiques. Un doigt toujours à sa tempe[169].

---

167 [inspiré de] *Mathemtik Lehren* N° 181 p. 9
168 https://www.ted.com/talks/terry_moore_why_is_x_the_unknown [résumé]
169 http://www.doctissimo.fr/html/dossiers/migraine/migraine_migraineux_celebres.htm [paraphrasé]

Fermat vantard

Types : Histoire, anecdote

Classes : À partir de la 5e
Sujets : Équations
Démonstration

Le théorème de Fermat (XVIIe siècle) dit que l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution pour $n > 2$. Fermat a noté sa conjecture dans la marge d'un livre de mathématiques et rajouté qu'il avait une preuve merveilleuse mais que la marge était trop étroite pour la présenter.

Euler l'a démontré pour $n = 3$. Andrew Wiles a trouvé la preuve générale en 1994. L'histoire de cette preuve est si dramatique qu'on dirait qu'elle est tirée d'un film. Wiles a travaillé dans la plus grande solitude pendant 7 ans avant de présenter une démonstration qui a fait fureur. Après les éloges initiaux, la déception a été grande quand les experts ont trouvé une erreur dans l'argumentation de Wiles. Celui-ci n'a pas abandonné, a continué ses travaux et trouvé un moyen pour contourner le problème[170]. Il a reçu le prix Abel en 2016 pour cette démonstration qui est la plus importante du XXIe siècle.

Sa preuve n'est sûrement pas celle dont Fermat parlait. Qui plus est, les mathématiciens doutent de l'existence d'une preuve merveilleuse de Fermat.

Pi dans une suite
Type : curiosité

Classes : Toutes
Sujets : Suites
Aires

Au lycée, le nombre Π n'apparaît que pour le calcul du périmètre et de l'aire d'un cercle ou d'un disque et en trigonométrie pour exprimer les angles en radians. Mais Pi apparaît aussi souvent dans des calculs de probabilités d'un niveau universitaire et dans la somme des termes de la suite des inverses des carrés successifs :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \frac{1}{100} + \frac{1}{121} \dots = \frac{\Pi^2}{6}$$

Euler a démontré ce résultat. Dans un premier temps, il a calculé à la main le résultat à 17 positions derrière la virgule. Il n'est pas évident d'en déduire $\frac{\Pi^2}{6}$ car il faudrait calculer le résultat à dix millions de chiffres pour que les six premières positions après la virgule soient justes. En effet, la somme converge très lentement vers le résultat.

Dans un second temps, qui a duré plusieurs années, Euler a réussi à démontrer le résultat exact. Aujourd'hui, les mathématiciens utilisent des programmes qui testent si un résultat peut contenir une constante telle que Π ou e [171].

[170] Ziegler p. 157 [paraphrasé]
[171] Ziegler pp. 184-185 [résumé]

Découverte d'une planète **Classes :** ***4^e, 3^e***
Type : anecdote **Sujet :** ***Système d'équations***

Au milieu du XIX^e siècle, le mathématicien John Adams (1819-1892) lit un livre sur la planète Uranus. Il découvre qu'Uranus change souvent sa trajectoire autour du soleil. La raison en est alors inconnue. Adams suspecte un objet d'une grande masse derrière ce mystère. Il décrit la trajectoire d'Uranus par 279 équations. La solution de ce système donne les coordonnées de cet objet. Jean Joseph le Verrier (1811-1877) a, de fait, la même idée au même moment. Il termine ses calculs en premier et les envoie à l'Observatoire de Berlin (1846). Effectivement les astronomes y voient une nouvelle planète qu'on appelle aujourd'hui Neptune[172].

Fangcheng **Classes :** ***4^e, 3^e***
Type : exercice **Sujet :** ***Système d'équations***

Le recueil de problèmes mathématiques *Juizhang suanshu* (Neuf chapitres sur l'art mathématique) a été assemblé en Chine entre 200 av. J.-C. et 300 ap. J.-C. Un chapitre est dédié à la résolution de systèmes d'équations. La méthode utilisée s'appelle *fangcheng* (tableau rectangulaire). Aujourd'hui ce mot signifie « équation ». Par un exemple, on voit que la méthode des tableaux rectangulaires est similaire à la résolution par combinaison linéaire[173].

Prenons le problème suivant.

Pour 3 tonneaux de riz de qualité moyenne et 4 tonneaux de riz de qualité supérieure, un paysan reçoit 18 pièces de monnaie.

Pour 2 tonneaux de riz de qualité moyenne et 5 tonneaux de riz de qualité supérieure, il reçoit 19 pièces de monnaie.

Quelle est le prix d'un tonneau de riz de qualité moyenne, quelle est le prix d'un tonneau de riz de qualité supérieure ?

2	3
5	4
19	18

→

6	3
15	4
57	18

→

3	3
11	4
39	18

→

	3
7	4
21	18

Le dernier tableau nous dit qu'un tonneau de bon riz coûte 3 pièces (car 21:7 = 3). Puis on calcule

(18-3·4) : 3 = 2. Le riz moyen coûte donc 2 pièces par tonneau.

[172] Hesse p. 185 [résumé]
[173] *Mathematik Lehren* N° 151 p. 9 [résumé]

Le complément quadratique d'il y a 3000 ans *Classes : 3e*
Types : Histoire, source *Sujet : Factorisation*

Le complément quadratique est lié – comme le suggère son nom – aux carrés. Ceci n'est pas forcément clair pour les élèves quand ils utilisent la méthode comme une recette. Même si la résolution d'équations du second degré est connue depuis plus de 4000 ans, Al-Khwarizmi a été le premier à donner une explication géométrique de la méthode autour de 800 ap. J.-C[174]. Son explication, qui ne contient pas de chiffres, mais seulement du texte, commence par « Racines et carrés sont égales à des nombres ». Par « racines » il faut entendre x et « carrés » signifie x^2. Al-Khwarizmi donne un exemple de la résolution de l'équation $x^2 + 10x = 39$. À l'aide la figure et du texte ci-dessous, on peut aisément suivre le raisonnement.

Voici un extrait du livre d'Al-Khwarizmi الكتاب المختصر في حساب الجابر والمقابلة (Al-kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr w'al-muqabala) qui dans sa traduction française s'appelle *Le livre du rajout et de l'équilibre*. À la page 5, on peut lire[175] :

« [...] un carré et 10 racines sont égaux à 39 unités. »
($x^2+10x=39$, ici l'équation est sous la forme vue ci dessus $x^2+bx=c$)
« La question par conséquent est dans ce type d'équation environ comme suit: Qui est le carré qui est combiné avec dix de ses racines donnera une somme totale de 39? »
(À quoi équivaut x dans cette équation?)
« La manière de résoudre ce type d'équation est prendre une moitié des racines juste mentionnées. » *(Pour résoudre cette équation, il faut diviser les x par 2)*
« Maintenant les racines dans le problème d'avant sont 10. »
(Divisons donc les x par 2)
« Prenez par conséquent 5, qui multiplié par lui-même donne 25, un résultat que vous en ajoutez à 39 donne 64. Avoir pris sa racine carrée qui est 8, retrancher du résultat la moitié de la racine, 5 ce qui reste 3. Le nombre trois représente par conséquent une racine de ce carré, est qui lui-même, bien sûr 9. Neuf donne par conséquent le carré. »

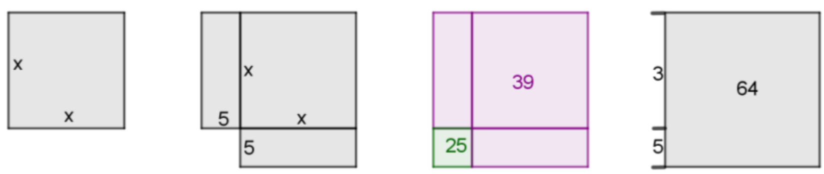


Image réalisée à l'aide de Geogebra

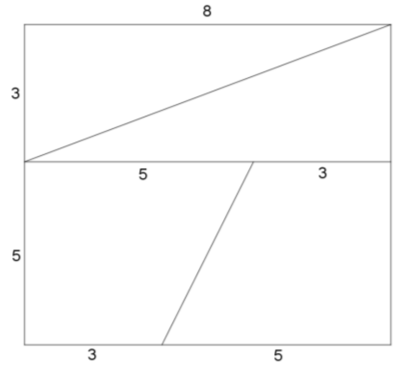
Cette méthode ne donne que la solution positive de l'équation. Al-Khwarizmi évitait les nombres négatifs. Dans nos régions, il a fallu attendre Euler (XVIIIe siècle) pour que le calcul avec les nombres négatifs soit courant. Pourtant, les Chinois calculaient avec les nombres négatifs depuis le deuxième siècle av. J.-C[176].

[174] *Mathematik Lehren* N° 91 p. 14 [traduction personnelle]
[175] http://al-andalous.e-monsite.com/pages/mathematiques/l-algebre-un-peu-de-pratique.html
[176] *Mathematik Lehren* N° 91 p. 14 [traduction personnelle]

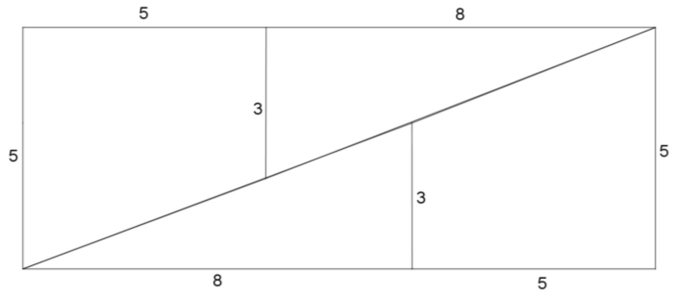
Fibonacci et aires
Type : curiosité

Classes : 3e, 2e
Sujets : Suites
Calcul littéral

Découpons un carré de côté 8 de la façon suivante[177] :



Essayons d'en former un rectangle de dimensions 13 par 5. Cela semble faisable.



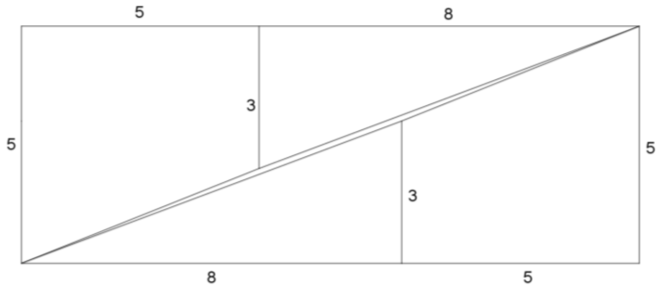
Calculons les aires des deux figures :

$$A_1 = 8 \cdot 8 = 64$$

$$A_2 = 13 \cdot 5 = 65$$

On ne trouve pas les mêmes aires. Sans avoir ajouté un bout de papier à notre découpage, l'aire du rectangle est plus grande que notre aire de départ.

L'erreur est vite trouvée : autour de la diagonale du rectangle il y a un espace en forme d'un parallélogramme presque aplati. On peut le vérifier en calculant les pentes du trapèze et du triangle :



[177] Hesse p. 85 [traduction personnelle]

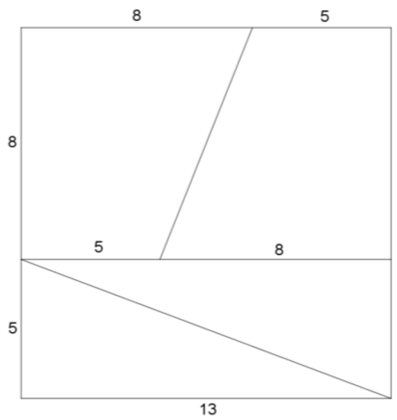
$$p_{trapèze} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

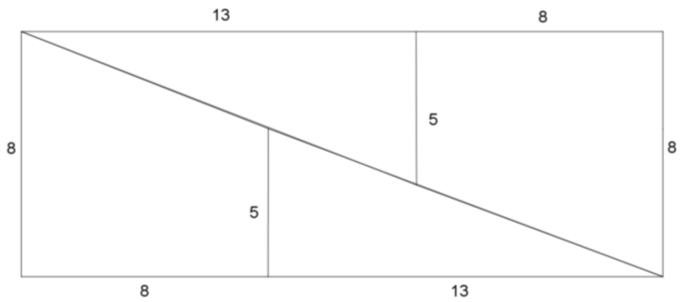
$$p_{triangle} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

Ce qu'il est intéressant de remarquer, c'est que la différence entre A_1 et A_2 est exactement 1.

Prenons un autre exemple.

Commençons par un carré de côté 13. Découpons-le de la même façon et réarrangeons-le en forme d'un rectangle de dimensions 21 par 8.





$$A_1 = 13 \cdot 13 = 169$$

$$A_2 = 21 \cdot 8 = 168$$

Cette fois-ci, nous avons « perdu » une unité d'aire en cours de route.

Afin d'obtenir cet effet curieux, les longueurs des côtés n'ont pas été choisies au hasard. Les nombres choisis comme longueurs sont les termes de la suite de Fibonacci. En étudiant d'autres exemples, on remarque que la différence entre les deux aires est toujours de 1. Démontrons cela[178] :

Appelons (F_n) la suite de Fibonacci commençant par $F_0 = 1$ et $F_1 = 1$. Si le terme F_n est la longueur du côté du carré, alors le rectangle a les dimensions F_{n+1} par F_{n-1}.

Démontrons par récurrence que $F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n \cdot F_n = (-1)^{n-1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

Initialisation : $F_2 \cdot F_0 - F_1 \cdot F_1 = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1^0$

Hypothèse de récurrence : $F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n \cdot F_n = (-1)^{n-1}$

[178] [inspiré de] Hesse p. 86

Pour un carré de côté F_{n+1} on obtient : $F_{n+2} \cdot F_n - F_{n+1} \cdot F_{n+1}$

$$\begin{aligned}
&= (F_n + F_{n+1}) \cdot F_n - F_{n+1} \cdot F_{n+1} \\
&= F_n \cdot F_n + F_{n+1} \cdot F_n - F_{n+1} \cdot F_{n+1} \\
&= F_n \cdot F_n + F_{n+1} \cdot (F_n - F_{n+1}) \\
&= F_n \cdot F_n - F_{n+1} \cdot (F_{n+1} - F_n) \\
&= F_n \cdot F_n - F_{n+1} \cdot F_{n-1} \\
&= -(-1)^{n-1} \\
&= (-1)^n
\end{aligned}$$

Puissances de 3 (le détail)

Types : Curiosité, exercice

Classes : 3e, 2e, 1e

Sujets : Puissances

Calcul littéral

La fraction $\frac{1}{9999999997}$ donne les puissances de 3 car elle est égale à $0{,}000000000100000000030000000009000000002700000000810000000243\,\ldots$

Explication :

$$\frac{1}{9999999997} = \frac{1}{10^{10} - 3} = \frac{1}{10^{10}} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{3}{10^{10}}} \right)$$

Développons la fraction entre parenthèses à l'aide de la formule suivante :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \qquad \text{avec} \quad x = \frac{3}{10^{10}}$$

On obtient : $\frac{1}{1-\frac{3}{10^{10}}} = 1{,}0000000003000000000900000000270000000081\,\ldots$

Et finalement en divisant par 10^{10} :

$$\frac{1}{9999999997} = \frac{1}{10^{10}} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{3}{10^{10}}} \right) = 0{,}0000000001000000000300000000090000000027\,\ldots$$

Ce genre de nombre s'appelle nombre zébré[179].

[179] Delahaye p. 136

La conjecture d'Euler *Classes : 3e, 2e, 1e*
Types : Histoire, anecdote *Sujet : Équations*

Euler, qui avait montré en 1753 qu'il n'y a pas de solutions entières de l'équation $x^3 + y^3 = z^3$, pensait qu'en général $x_1^n + \cdots + x_{n-1}^n = z^n$ n'avait pas de solution entière[180]. Mais au XXe siècle, plusieurs exemples ont montré que la conjecture d'Euler était fausse :

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 135^5 = 144^5$$

$$2\,682\,440^4 + 15\,365\,639^4 + 18\,796\,760^4 = 20\,615\,673^4$$

Équation à deux inconnues *Classes : 3e, 2e, 1e*
Type : blague *Sujet : Équations*

Alexander Eilers, auteur d'aphorismes, écrit :

« "Die Wahrheit ist ein Weib." Équation de Nietzsches à deux inconnues[181]. »

Fibonacci dans les tournesols *Classes : 2e*
Types : curiosité *Sujet : Suites*

En observant les graines d'un tournesol, on remarque qu'elles sont disposées en spirale. En fait, on peut voir des spirales tournant vers la gauche et des spirales tournant vers la droite. Le nombre de spirales tournant à gauche et le nombre de spirales tournant à droite sont toujours deux nombres consécutifs de la suite de Fibonacci[182].

.....

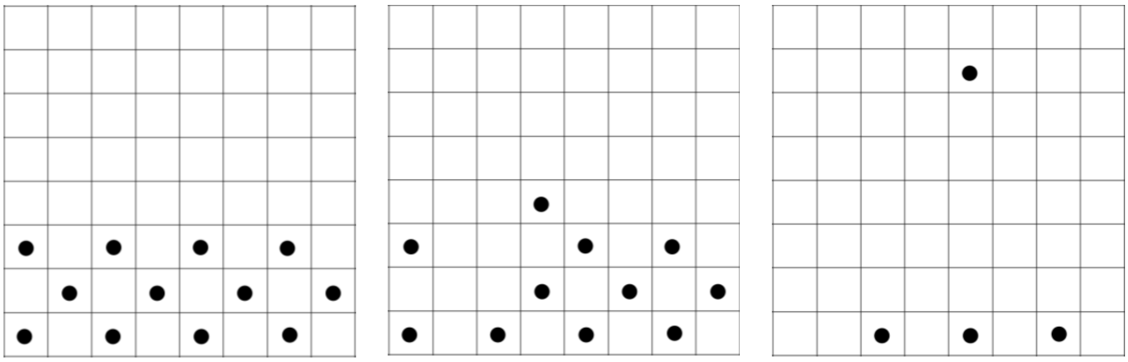
Images : https://sites.google.com/site/tpenombreorstenhalllnf/modelisation-geogebra-le-tournesol

[180] Hesse p. 52 [résumé]
[181] http://www.aurora-magazin.at/literatur/eilers_aphorismen_frm.htm [traduction personnelles]
[182] Beutelspacher p. 12 [résumé]

Fibonacci et le jeu de dames *Classes : 2^e^*

Type : curiosité *Sujet : Suites*

Christian Hesse décrit dans son livre *Warum Mathematik glücklich macht* un jeu basé sur le jeu de dames. En partant de trois rangées de pions disposés sur les cases noires du damier, on essaie, en solitaire, d'arriver à la dernière rangée avec un pion. On remarque vite que cela est impossible. Avec la meilleure suite de mouvements on ne peut arriver qu'à l'avant-dernière ligne.



Pour montrer qu'il est impossible d'arriver à la dernière ligne, Hesse utilise un moyen surprenant dans ce contexte : la suite de Fibonacci.

Afin de mieux pouvoir quantifier le mouvement des pions, on fait l'observation suivante : un pion, placé à une ligne l donnée, bat un pion de la ligne suivante $l+1$ et vient se placer à la ligne $l+2$. L'idée extraordinaire est d'attribuer à chaque carré d'une ligne le même nombre de la suite de Fibonacci comme indiqué ci-dessous.

	21		21		21		21
13		13		13		13	
	8		8		8		8
5		5		5		5	
	3		3		3		3
2		2		2		2	
	1		1		1		1
1		1		1		1	

Il appelle énergie d'un pion la valeur du carré sur lequel le pion se trouve.

L'astuce consiste à constater que le mouvement d'un pion ne change pas l'énergie totale des pions du damier puisque la somme des énergies qui disparaissent de la ligne l et de la ligne $l+1$ durant le mouvement est égale à l'énergie de la ligne $l+2$.

Pour qu'un pion puisse arriver à la dernière ligne, il a besoin d'accumuler une énergie égale à 21. Or cela est impossible puisque la position de départ contient l'énergie totale :

$4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 16.$ [183]

[183] Hesse p. 64 [résumé]

Étymologie du mot « algèbre » *Classes : 2e, 1e*
Type : Histoire *Sujet : Histoire*

Au IXe siècle, Al-Khwarizmi utilise le mot *al-jabr* pour désigner le transfert d'un terme d'un membre à l'autre membre d'une équation. De cette reconstruction de l'équation vient le mot « algèbre » [184].

[184] https://www.maths-et-tiques.fr/index.php/histoire-des-maths/nombres/histoire-de-l-algebre [paraphrasé]

Bibliographie

Articles

MEN LUXEMBOURGEOIS, *socles de compétences*
URL : https://ssl.education.lu/eSchoolBooks/QuickSearch.aspx#18420$39698$90639

MEN FRANÇAIS, *Les dossiers - Enseignement scolaire : l'évaluation internationale PISA 2003 : compétences des élèves français en mathématiques, compréhension de l'écrit et sciences*. Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance, mars 2007
URL : http://media.education.gouv.fr/file/83/1/4831.pdf

OCDE, *Compétences en sciences, lecture et mathématiques : le cadre d'évaluation de PISA 2006.* Éditions OCDE, 2006
URL : http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/38378898.pdf

Govert SCHILLING, *Liquid-mirror telescope set to give stargazing a new spin,* mars 2003
URL : https://web.archive.org/web/20030818233315/http://www.govertschilling.nl/artikelen/science/030314_sc.htm

Audio

Albrecht BEUTELSPACHER, *Geschichte der Mathematik*, Komplett Media GmbH, Grünwald

Albrecht BEUTELSPACHER, *Geschichte der Mathematik 2,* Komplett Media GmbH, Grünwald

Albrecht BEUTELSPACHER*, Geschichte der Mathematik 3*, Komplett Media GmbH, Grünwald

France Inter, *Grand bien vous fasse* : « Petits ou grands : comment développer le goût d'apprendre ? »

URL : www.franceinter.fr/emissions/grand-bien-vous-fasse/grand-bien-vous-fasse-24-octobre-2018

Journaux

Numéro 91 : Mathematik historisch verstehen, *Mathematik Lehren*. Friedrich Verlag, Seelze, 1999

Numéro 151 : Geschichte der Mathematik, *Mathematik Lehren*. Friedrich Verlag, Seelze, 2018

Numéro 181 : Überraschungen, vom Staunen zum Verstehen, *Mathematik Lehren*. Friedrich Verlag, Seelze, 2013

Numéro 195 : Interesse wecken, Talente fördern, *Mathematik Lehren*. Friedrich Verlag, Seelze, 2016

Livres

Veronika BRANDSTÄTTER et al., *Motivation und Emotion*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2013

Wiltrud GIESEKE, *Lebenslanges Lernen und Emotionen*. W. Bertelsmann Verlag, Bielefeld, 2009

Gerhard ROTH, *Bildung braucht Persönlichkeit*. Klett-Cotta, Stuttgart, 2011

Manfred SPITZER, *Lernen*. Spektrum, Heidelberg, 2012

Manfred SPITZER, *Nervensachen*. Suhrkamp, Stuttgart, 2005

Gernot HORSTMANN et Gesine DREISBACH, *Allgemeine Psychologie 2*. Beltz, Weinheim, Basel, 2012

Albrecht BEUTLSPACHER, *Einmal sechs Richtige*. Piper, München, 2008

Clifford A. PICKOVER, *Le Beau Livre des Maths*. Dunod, Paris, 2010

FRÉDÉRIC II DE PRUSSE (trad. Richard ALDINGTON), *Letters of Voltaire and Frederick the Great, Letter H 7434, 25 January 1778*, Brentano's, New York, 1927

Jean-Paul DELAHAYE, *Mathématiques pour le plaisir*. Belin, Paris, 2010

Howard EVES, *In Mathematical Circles*, Prindle, Weber & Schmidt Inc, Boston, 1969

Ian STEWART, *Professor Stewart's Cabinet of Mathematical Curiosities*. Profile Books, London, 2010

Günter M. ZIEGLER, *Darf ich zahlen*. Piper, München, 2010

Jamel OUERSIGHNI, *À quoi servent les mathématiques ?* L'Harmattan, Paris, 2003

Ralf CASPARY, *Lernen und Gehirn*, Verlag Herder GmbH, Freiburg im Breisgau, 2006

Sites internet

www.labbe.com

www.maths-et-tiques.fr

www.arndt-bruenner.de

www.wikipedia.fr

http://primes.utm.edu

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html

www.aurora-magazin.at

www.librairie-du-cardinal.com

http://photos.linternaute.com

www.ted.com

https://sites.google.com/site/tpenombreorstenhalllnf/home

Index

P

R

S

T

V

W